EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants:
- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants:
A : «la bille a été fabriquée par la machine A» ;
B : «la bille a été fabriquée par la machine B »;
V : «la bille est vendable».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $p(B \cap V) = 0{,}372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison?

PartieB

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}055$.
   Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.
2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.
   Sachant que $p(0{,}9 \leq Y \leq 1{,}1) = 0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif?

CORRECTION

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

D'après l'énoncé on a : « La machine A fournit 60 % de la production journalière » donc $p(A) = 0{,}6$.
D'autre part « La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 % » donc $p_A(V) = 0{,}98$.

Or d'après le cours, $p(A \cap V) = p(A) \times p_A(V)$ on en déduit que $p(A \cap V) = 0{,}6 \times 0{,}98$

Conclusion : $\boldsymbol{p(A \cap V) = 0,588}$

---

2. Justifier que $\boldsymbol{p(B \cap V) = 0,372}$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

D'après l'énoncé « 96 % de la production journalière est vendable » ainsi $p(V) = 0{,}96$.

L'entreprise ne fabriquant que des billes provenant des machines A ou B, d'après la loi des probabilités totale on a : $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) \Leftrightarrow 0{,}96 = 0{,}588 + p(B \cap V) \Leftrightarrow p(B \cap V) = 0{,}96 - 0{,}588$

Conclusion : $\boldsymbol{p(B \cap V) = 0,372}$

---

3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison?

On cherche $p_{\overline{V}}(B)$. D'après le cours, $p_{\overline{V}}(B) = \frac{p(B \cap \overline{V})}{p(\overline{V})}$
Or d'après la loi des probabilités totales $p(B) = p(B \cap V) + p(B \cap \overline{V}) \Leftrightarrow 0{,}4 = 0{,}372 + p(B \cap \overline{V})$
On en déduit que $0{,}4 = 0{,}372 + p(B \cap \overline{V}) \Leftrightarrow p(B \cap \overline{V}) = 0{,}4 - 0{,}372 = 0{,}028$.
On a aussi $p(\overline{V}) = 1 - p(V) = 1 - 0{,}93 = 0{,}04$.

Ainsi $p_{\overline{V}}(B) = \frac{0{,}028}{0{,}04}$, donc $\boldsymbol{p_{\overline{V}}(B) = 0,7}$

PartieB

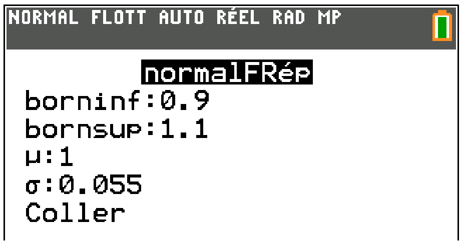
Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. ***Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.***
   Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

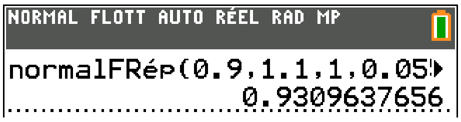
On sait que l'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Ainsi on cherche $p(0{,}9 \leq X \leq 1{,}1)$.
On va utiliser notre TI-83 Premium CE, on appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **normalFRép(**

On complète la boite de dialogue : La moyenne est de $\mu = 1$ et l'écart type de $\sigma = 0{,}055$:



On obtient ainsi $\boldsymbol{p(0,9 \leq X \leq 1,1) = 0,93}$



Dans la partie précédente on a $\boldsymbol{p_B(V)} = \frac{p(B\cap V)}{p(B)} = \frac{0{,}372}{0{,}4} = \boldsymbol{0,93}$. Le résultat est bien identique à celui de la partie A.

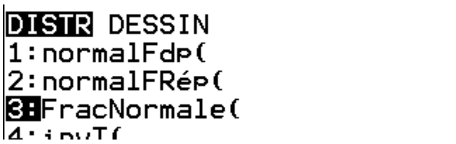
2. ***De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.***
Sachant que $p(0,9 \leq Y \leq 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

On sait que $p(0,9 \leq Y \leq 1,1) = 0,98 \Leftrightarrow p(-0,1 \leq Y - 1 \leq 0,1) = 0,98$
$\Leftrightarrow p\left(-\frac{0,1}{\sigma'} \leq \frac{Y-1}{\sigma'} \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98$. Or Y suit une loi normale de paramètre $\mu = 1$ et d'écart type σ' donc d'après le cours $Y' = \frac{Y-1}{\sigma'}$ suit une loi normale centrée réduite.
On cherche donc σ' tel que $p\left(-\frac{0,1}{\sigma'} \leq Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98 \Leftrightarrow p\left(Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) - p\left(Y' \leq -\frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98$
Puis par symétrie de la loi normale centrée réduite, $p\left(Y' \leq -\frac{0,1}{\sigma'}\right) = p\left(Y' \geq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 1 - p\left(Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right)$
On a donc $p\left(Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) - p\left(Y' \leq -\frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98 \Leftrightarrow p\left(Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) - \left(1 - p\left(Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right)\right) = 0,98$
D'où $2p\left(Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) - 1 = 0,98 \Leftrightarrow p\left(Y' \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = \frac{1+0,98}{2} = 0,99$

On va utiliser notre TI83 Premium CE pour calculer σ' :

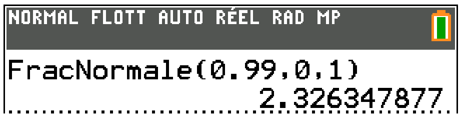
On appuie sur 

puis on choisit **`FracNormale(`**

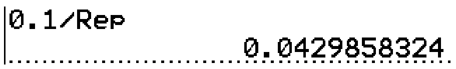


On complète la boite de dialogue :

D'où $\frac{0,1}{\sigma} \approx 2,3263$



On en déduit que $\sigma \approx \frac{0,1}{2,3263}$
soit $\boldsymbol{\sigma = 0,043}$ à 10^{-3} près.



Partie C

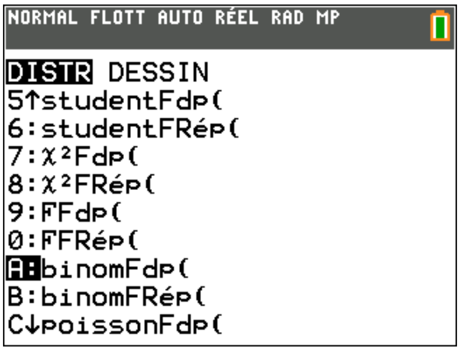
1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à $\mathbf{10^{-3}}$ *.*

On est en présence d'une expérience aléatoire à 2 issues possibles (la bille est noire ou son contraire) qu'on répète 40 fois de suite de façon indépendante. Ceci constitue un schéma de Bernoulli.
Soit X la variable aléatoire qui dénombre les billes noires dans le sachet de 40 billes.
X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = \frac{1}{5}$ (car il y a 5 couleurs possibles choisies de façon aléatoire et équiprobable).
La probabilité que le sac contient 10 billes noires est donc $p(X = 10)$.

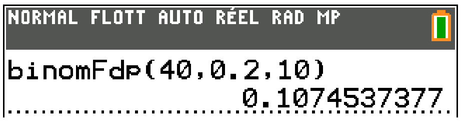
Pour calculer $p(X = 10)$ on utilise sa TI83 Premium CE :

On appuie sur [2nde] [var] (distrib) puis on choisit **binomFdp(**



On complète la boite de dialogue :

D'où $\boldsymbol{p(X = 10) = 0,107}$ à 10^{-3} près.



1.b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes?

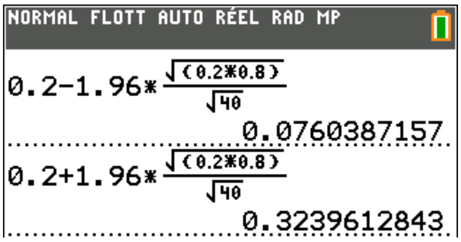
$n = 40$ donc $n \geq 30$ et $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$ donc $np = 8$ ainsi $np \geq 5$ et $n(1-p) = 32$ donc $n(1-p) \geq 5$.
Les conditions d'application du théorème de l'intervalle de fluctuation sont vérifiées, donc dans 95% des cas la fréquence observée des billes noires dans le sac de 40 billes appartient à l'intervalle

$$I = \left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

donc $I = [\mathbf{0,073; 0,324}]$

la fréquence observée des billes noires dans le sac de 40 billes est $f = \frac{12}{40} = 0{,}3$

On a $f \in I$ donc **cela ne remet pas en cause le réglage de la machine.**



2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif?

Soit X' la variable aléatoire qui dénombre les billes noires dans un sachet contenant n billes. X suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}2$.

On cherche n tel que $p(X' \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - p(X' < 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow p(X' < 1) \leq 0{,}01$
$\Leftrightarrow p(X' = 0) \leq 0{,}01$.

Or $p(X' = 0) = \binom{0}{n} 0{,}2^0 \times 0{,}8^{n-0} = 0{,}8^n$ car $\binom{0}{n} = 1$.
On doit donc avoir $0{,}8^n \leq 0{,}01$ les deux membres étant positifs stricts et la fonction ln étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$ on a $\ln(0{,}8^n) \leq \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \ln 0{,}8 \leq \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$

Or $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}64$
On obtient ainsi $n \geq 21$

Conclusion : **le nombre minimal de billes que doit contenir chaque sachet est 21**.