EXERCICE 4 : **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$$P_{X_n=0}(X_{n+1}=1), P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)$$
   b) Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0), P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :
$$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$
et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n,, $R_{n+1} = R_n \times M$.
Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :
$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. a) Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.
   b) Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=0), \lim_{n\to+\infty} P(X_n=1) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} P(X_n=2)$$
Interpréter ces résultats.

CORRECTION

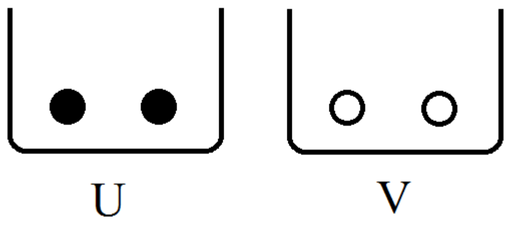
EXERCICE 4 : **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

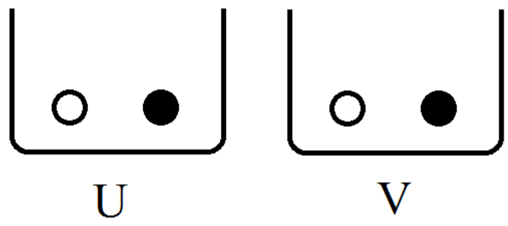
1. a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{X_n=0}(X_{n+1}=1), P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)$$

$P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité qu'il y ait 1 boule blanche dans l'urne U au $n+1$-ième tirage sachant qu'il y a aucun boule blanche dans l'urne U au n-ième tirage.



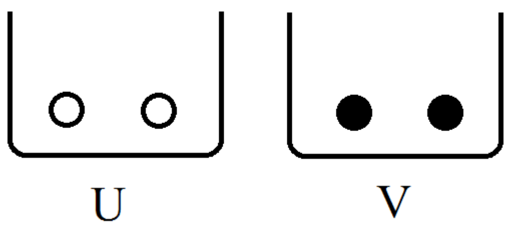
Etat des urnes au tirage n.



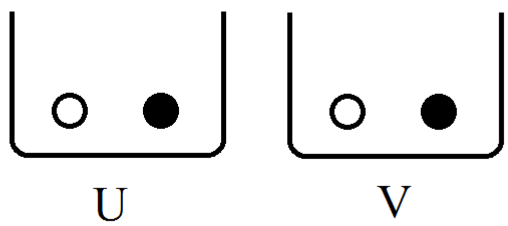
Etat des urnes au tirage $n+1$.

Si il n'y a que des boules noires dans l'urne U au tirage n, alors au tirage suivant, étant donné qu'on prend une boule de U et de V et qu'on les échange, il y aura forcément 1 boule blanche dans chaque urne.
Conclusion : $\boldsymbol{P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)=1}$

$P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité qu'il y ait 1 boule blanche dans l'urne U au $n+1$-ième tirage sachant qu'il y a 2 boules blanches dans l'urne U au n-ième tirage.



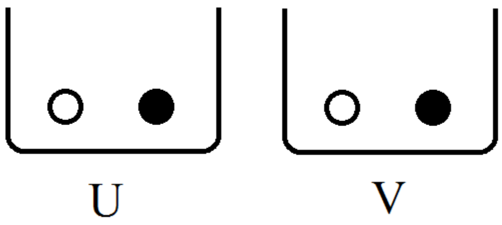
Etat des urnes au tirage n.



Etat des urnes au tirage $n+1$.

Si il n'y a que des boules noires dans l'urne U au tirage n, alors au tirage suivant, étant donné qu'on prend une boule de U et de V et qu'on les échange, il y aura forcément 1 boule blanche dans chaque urne.
Conclusion : $\boldsymbol{P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)=1}$

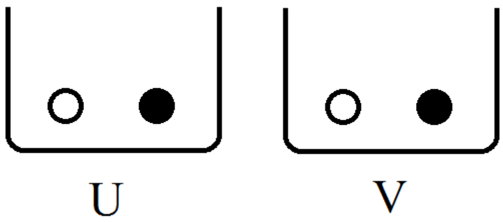
$P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité qu'il y ait 1 boule blanche dans l'urne U au $n+1$-ième tirage sachant qu'il y a 1 boule blanche dans l'urne U au n-ième tirage.



Etat des urnes au tirage n.

Cas n°1
On prend une boule blanche de U
et une boule blanche de V

Cas n°2
On prend une boule noire de U
et une boule noire de V



Etat des urnes au tirage $n+1$.

Dans les autres cas nous n'avons pas une seule boule dans U. Chaque cas a une probabilité de $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Donc $P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

Conclusion : $\boldsymbol{P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}}$

1.b) Exprimer $\boldsymbol{P(X_{n+1}=1)}$ *en fonction de* $\boldsymbol{P(X_n=0), P(X_n=1)}$ *et* $\boldsymbol{P(X_n=2)}$*.*

$P(X_{n+1}=1)=P(X_{n+1}=1\ et\ X_n=0)+P(X_{n+1}=1\ et\ X_n=1)+P(X_{n+1}=1\ et\ X_n=2)$
$=P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=0)+P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=2)$
$=1\times P(X_n=0)+\dfrac{1}{2}\times P(X_n=1)+1\times P(X_n=2)$

Conclusion : $\boldsymbol{P(X_{n+1}=1)=\ P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2)}$

---

2. Déterminer $\boldsymbol{R_1}$ *et justifier que, pour tout entier naturel* $\boldsymbol{n}$*,* $\boldsymbol{R_n=R_0\times M^n}$*.*

$$R_1=\begin{pmatrix}P(X_1=0) & P(X_1=1) & P(X_1=2)\end{pmatrix}$$

On a $R_1=R_0\times M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $R_n=R_0\times M^n$:

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie au rang 0 :
$R_0\times M^0=R_0$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$ fixé la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire : $R_n=R_0\times M^n$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire montrons que $R_{n+1}=R_0\times M^{n+1}$

On sait d'après l'énoncé que $R_{n+1} = R_n \times M$ or d'après l'hypothèse de récurrence $R_n = R_0 \times M^n$
Ainsi $R_{n+1} = R_0 \times M \times M^n = R_0 \times M^{n+1}$, le propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : **pour tout $n \in \mathbb{N}$ $R_n = R_0 \times M^n$.**

---

3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :
Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$:

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie au rang 0 :
$P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_3 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I_3 = M^0$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire :

$M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire montrons que $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$
On a $M^{n+1} = M \times M^n$. Or d'après l'hypothèse de récurrence $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et d'après l'énoncé, $M = P \times D \times P^{-1}$, on en déduit que $M^{n+1} = P \times D \times P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} = P \times D \times I_3 \times D^n \times P^{-1}$
donc $M^{n+1} = P \times D \times D^n \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : **pour tout $n \in \mathbb{N}$ $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.**

---

4. a) Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

D'après l'énoncé, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\boldsymbol{D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$

---

4. b) Sachant que $R_0P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

D'après 2. pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$
D'après 3. pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$
Donc $R_n = R_0 \times P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times D^n \times P^{-1}$
De plus, d'après l'énoncé et d'après 4.a.

$D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi $R_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $\boldsymbol{R_n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} & -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

---

5. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0)\,,\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1)\ \ et\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$$

Interpréter ces résultats.

On sait d'après le cours que si $-1 < q < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Lorsque n devient très grand,
la probabilité qu'il n'y ait aucune boule blanche dans U est $\frac{1}{6}$,
la probabilité qu'il y ait une boule blanche dans U est $\frac{2}{3}$,
et la probabilité qu'il y ait deux boules blanches dans U est $\frac{1}{6}$,

---