EXERCICE 3 : **3 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1. Écrire le nombre $1+i$ sous forme exponentielle.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

CORRECTION

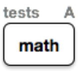
EXERCICE 3 : **3 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n=(1+i)^n$.

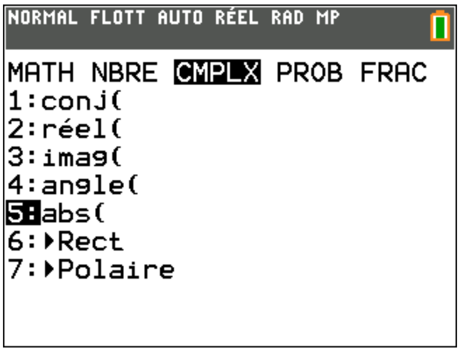
1. Écrire le nombre $1+i$ sous forme exponentielle.

On a $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Ainsi $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
Donc $\boldsymbol{1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

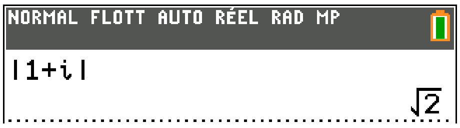
On peut vérifier ce calcul à l'aide de notre TI83 Premium CE :

Pour calculer le module, on appuie sur la touche 

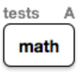
puis on choisit **abs** :



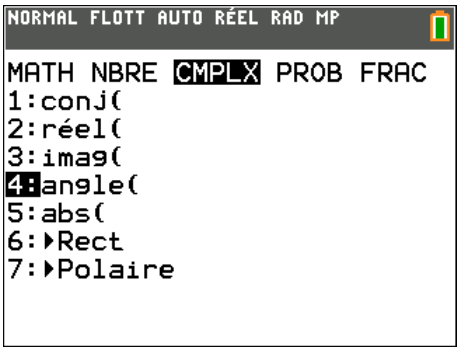
On entre $1+i$ et on valide.



i est accessible avec la touche 

Pour calculer un argument, on appuie encore sur 

puis on choisit **angle** :



On obtient bien les mêmes résultats.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$ signifie que $OM_n > OA$ (et donc $OM_n > OB, OM_n > OC$ et $OM_n > OD$ car $OA = OB = OC = OD = 4$).

Résolvons l'inéquation $OM_n > 4 \Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |(1+i)^n| > 4 \Leftrightarrow |1+i|^n > 4 \Leftrightarrow \sqrt{2}^n > 4$.

Les deux membres de l'inéquation étant positifs stricts et la fonction ln étant croissante sur $]0;+\infty[$ on a : $\ln\left(\sqrt{2}^n\right) > \ln 4 \Leftrightarrow n \ln \sqrt{2} > \ln 2^2 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \ln 2 > 2 \ln 2 \Leftrightarrow n > 4$ car $\ln 2 > 0$.

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 5$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$. L'entier recherché est $\boldsymbol{n_0 = 5}$.
