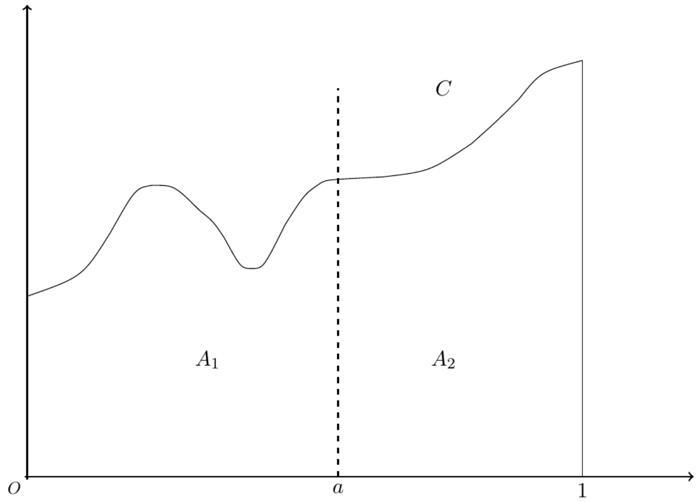
EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a un réel tel que $0 < a < 1$.

On note :

- C la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal ;
- A_1 l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe C d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part ;
- A_2 l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe C d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires A_1 et A_2 sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A - Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a, et déterminer sa valeur :

   a) f est une fonction constante strictement positive;

   b) f est définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $f(x) = x$.

2. a) À l'aide d'intégrales, exprimer (en unité d'aire) les aires A_1 et A_2.

   b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
   Démontrer que si les réel a satisfait (E), alors $F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}$.

   La réciproque est-elle vraie ?

3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
   a) La fonction f est définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $f(x) = e^x$.
   Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel a, et déterminer sa valeur.

   b) La fonction f définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$.

   Vérifier que la valeur $a = \frac{2}{5}$ convient.

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de α

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0; 1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrer que si α est un réel satisfaisant la condition (E), alors α est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$$

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l' intervalle $[0; 1]$. On note α cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$, et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

   a) Calculer u_1.
   b) Démontrer que la fonction g est croissante sur l' intervalle $[0; 1]$.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
   d) Prouver que la suite (u_n) est convergente.
   À l'aide des opérations sur les limites, prouver que sa limite est égale à α.
   e) On admet que le réel α vérifie l' inégalité $0 < \alpha - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

CORRECTION

EXERCICE 2 6 points

Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires A_1 et A_2 sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

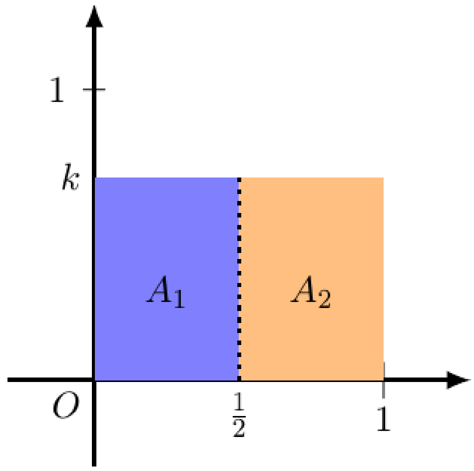
Partie A - Étude de quelques exemples

1. *Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a, et déterminer sa valeur :*
   a. *f est une fonction constante strictement positive.*

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0;1)$ $f(x) = k$.

$A_1 = \frac{1}{2} \times k = \frac{k}{2}$ et $A_2 = \frac{1}{2} \times k = \frac{k}{2}$

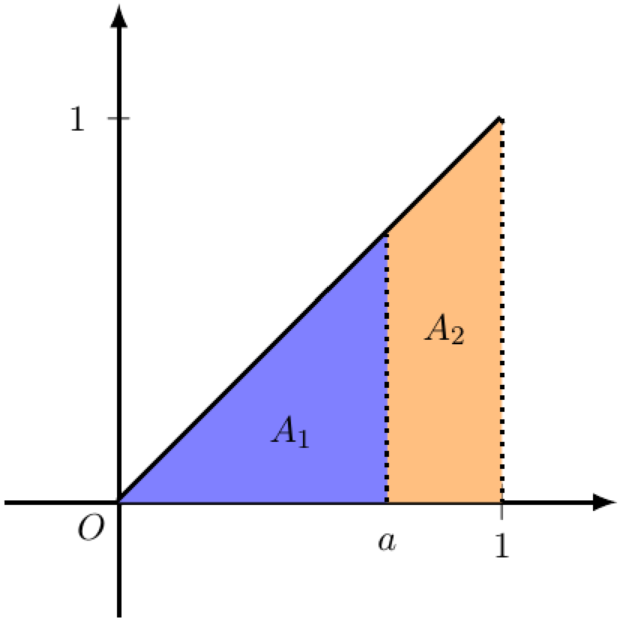
Ainsi $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$



1. b. f est définie pour tout réel x de $[0;1]$ par $f(x)=x$.

Soit $a\in]0;1[$. On a :
L'aire du triangle rectangle bleu est :

$$A_1=\frac{1}{2}\times a\times a$$



On en déduit l'aire en orange en prenant l'aire totale formée par le triangle rectangle d'aire $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ et en lui ôtant l'aire du triangle bleu :

$$A_2=\frac{1}{2}-A_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2$$

Ainsi la condition $A_1=A_2\Leftrightarrow\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2$

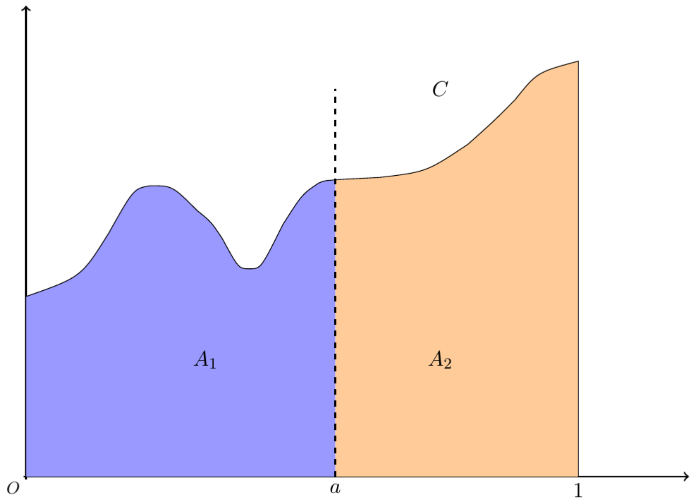
$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{1}{2}}$ car $a\geq 0$.

Donc $a=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \boldsymbol{a=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

2. a. À l'aide d'intégrales, exprimer (en unité d'aire) les aires A_1 et A_2.

$$\boldsymbol{A_1=\int_0^a f(x)dx\ u.a.}\text{ et}$$

$$\boldsymbol{A_2=\int_a^1 f(x)dx\ u.a.}$$



2. b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
Démontrer que si les réel a satisfait (E), alors $F(a)=\frac{F(0)+F(1)}{2}$.
La réciproque est-elle vraie ?

On sait que F est une primitive de f sur $[0;1]$. Ainsi

$$A_1=\int_0^a f(x)dx=F(a)-F(0) \quad \text{et } A_2=\int_a^1 f(x)dx=F(1)-F(a)$$

(E) est satisfaite $\Leftrightarrow A_1=A_2 \Leftrightarrow F(a)-F(0)=F(1)-F(a) \Leftrightarrow 2F(a)=F(0)+F(1)$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{F(a)=\frac{F(0+F(1)}{2}}$$

Etant donné que nous avons raisonné avec des équivalences, **la réciproque est vraie**.

---

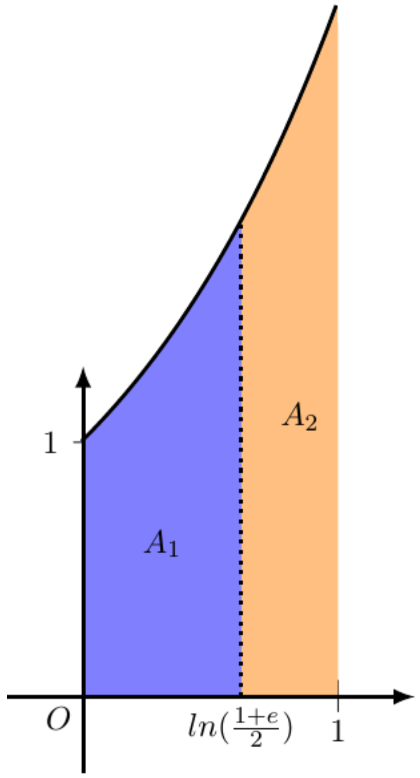
3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
a) La fonction f est définie pour tout réel x de $[0;1]$ par $f(x)=e^x$.
Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel a, et déterminer sa valeur.

D'après 2.b on a $A_1=A_2 \Leftrightarrow F(a)=\frac{F(0)+F(1)}{2}$

Or si pour tout $x\in[0;1]$ $f(x)=e^x$ alors la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x)=e^x$ est une primitive de f sur $[0;1]$.

$F(a)=\frac{F(0)+F(1)}{2} \Leftrightarrow e^a=\frac{e^0+e^1}{2} \Leftrightarrow e^a=\frac{1+e}{2}$ or les deux membres sont positifs stricts donc

$$\ln(e^a)=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{a=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$



---

3. b) La fonction f définie pour tout réel x de $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$ par $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$.

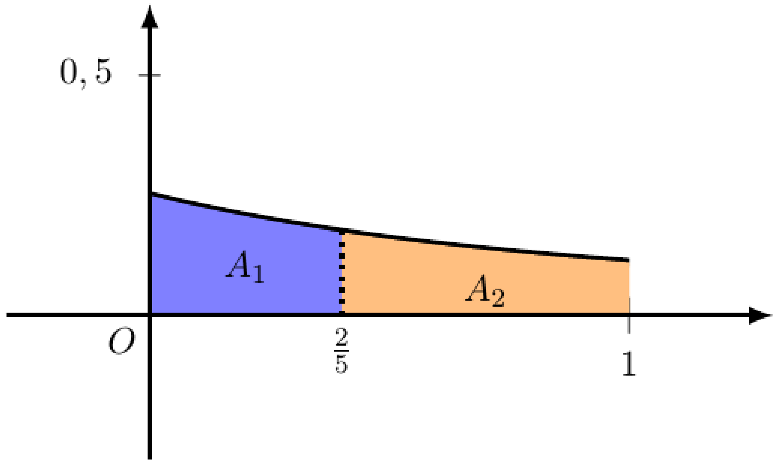
Vérifier que la valeur $a=\frac{2}{5}$ convient.

Si pour tout $x\in[0;1]$ $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ alors la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x)=-\frac{1}{x+2}$ est une primitive de f sur $[0;1]$.

$$\frac{F(0)+F(1)}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{0+2}+\left(-\frac{1}{1+2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{12}$$

$$\text{et } F\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{\frac{2}{5}+2}=-\frac{1}{\frac{12}{5}}=-\frac{5}{12}$$



La condition $F\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{F(0)+F(1)}{2}$ est bien vérifiée, la valeur de $a=\frac{2}{5}$ convient.

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$ par $f(x)=\mathbf{4}-\mathbf{3}x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$$

Si pour tout $x\in[0;1]$ $f(x)=4-3x^2$ alors la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x)=4x-x^3$ est une primitive de f sur $[0;1]$.

Si a est un réel satisfaisant la condition $(E)\Leftrightarrow F(a)=\frac{F(0)+F(1)}{2}$ d'après 2.b

$$\Leftrightarrow 4a-a^3=\frac{0+4-1^3}{2}\Leftrightarrow 4a-a^3=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4a=a^3+\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=\frac{a^3}{4}+\frac{3}{8}$$

---

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$, et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Calculer u_1.

$u_1 = g(u_0) = g(0)$ donc $u_1 = \frac{3}{8}$

---

2. b. Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

g est une fonction polynôme, donc g est dérivable sur $[0;1]$ et on a :
Pour tout $x \in [0;1]$ $g'(x) = \frac{3x^2}{4}$. Or $\forall x \in [0;1]$ $\frac{3x^2}{4} \geq 0$, g est donc croissante sur $[0;1]$.

---

2. c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation : Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :
$u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{3}{8}$ on a donc bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.
La proposition est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et montrons que

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, or on a prouvé dans 2.b. que g est croissante sur $[0\,;1]$ donc $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq \frac{1^3}{4} + \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{8}$$

ce qui prouve que $0 \leq \frac{3}{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{8} \leq 1$ soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On a démontré que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

---

2. d. Prouver que la suite (u_n) est convergente.
À l'aide des opérations sur les limites, prouver que sa limite est égale à a.

D'après 2.c. on sait que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 1, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel $l \in [0,1]$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n^3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{l^3}{4} + \frac{3}{8}$

On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ or $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{4} + \frac{3}{8}$ donc $\boldsymbol{l = \frac{l^3}{4} + \frac{3}{8}} \Leftrightarrow l = \frac{l^3}{4} + \frac{3}{8}$

a étant, d'après l'énoncé, l'unique réel de l'intervalle $[0; 1]$ tel que $a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}$, cela prouve bien que la limite de la suite (u_n) est le réel $a \in [0; 1]$ tel que $\boldsymbol{a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}}$

---

2. e) On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

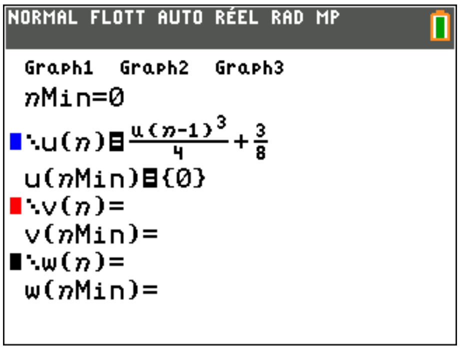
Pour calculer u_{10} on utilise sa TI83 Premium CE :
Tout d'abord il fau mettre sa calculatrice en mode suite en appuyant sur mode (quitter)

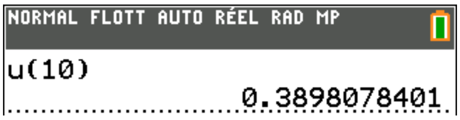
On entre l'expression de la suite en appuyant sur f(x) (graph stats f1). On sait que $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{8}$ il faut modifier l'expression pour avoir u_n en fonction de u_{n-1} :

$$u_n = \frac{u_{n-1}^2}{4} + \frac{3}{8}$$

$\boldsymbol{n}$ est obtenu en appuyant sur X,T,θ,n (échanger) et $\boldsymbol{u}$ en appuyant sur 2nde 7 (u_n)

On appuie sur 2nde mode (quitter) pour quitter l'éditeur de suites, et on calcul u_{10}.





Conclusion : $\boldsymbol{u_{10} \approx 0,3898078401}$ à 10^{-10} près.
