EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0{,}2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0, 95? Arrondir ce temps à la minute près.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard.
   Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est 0, 494.
2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel.
   Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

CORRECTION

EXERCICE 3 — 5 points

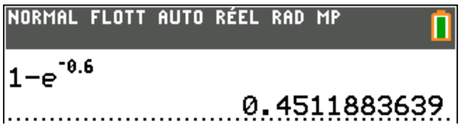
Commun à tous les candidats

Partie A

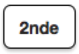
1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

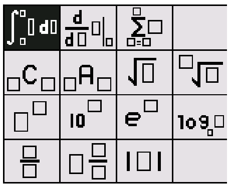
On souhaite calculer $p(T \leq 3)$, d'après le cours on a :

$$\boldsymbol{p(T \leq 3)} = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda t} = \int_0^3 0{,}2e^{-0{,}2t} = \left[-e^{-0{,}2t}\right]_0^3$$
$$= -e^{-0{,}2\times 3} - \left(-e^{-0{,}2\times 0}\right) = 1 - e^{-0{,}6} \approx \boldsymbol{0{,}451}$$

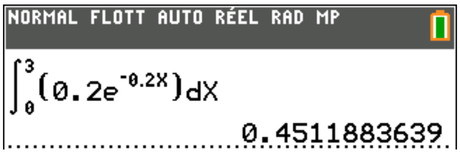


On peut aussi vérifier notre calcul intégral à l'aide de notre TI 83 Premium CE :

On appuie sur   pour utiliser l'éditeur mathématique, puis on choisit intégral.



On entre le calcul à effectuer et on obtient bien la valeur 0,451, ce qui confirme bien notre calcul.



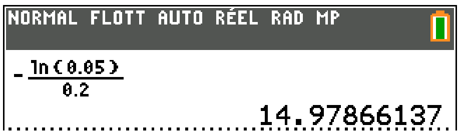
2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0, 95? Arrondir ce temps à la minute près.

On cherche t tel que $\quad p(T \leq t) \geq 0{,}95$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}2t} \geq 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}2t} \leq 0{,}05.$$

Les deux membres étant positifs stricts, on a :

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-0{,}2t}\right) \leq \ln(0{,}05)$$
$$\Leftrightarrow -0{,}2t \leq \ln(0{,}05)$$
$$\Leftrightarrow t \geq -\frac{\ln(0{,}05)}{0{,}2}$$



La durée minimale qu'il doit attendre pour voir l'étoile filante suivante avec une probabilité supérieure à 0, 95 est de 15 minutes environ

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

D'après le cours on a $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,2} = 5$ minutes. Donc **en deux heures ils verront environ 24 étoiles filantes**.

Partie B

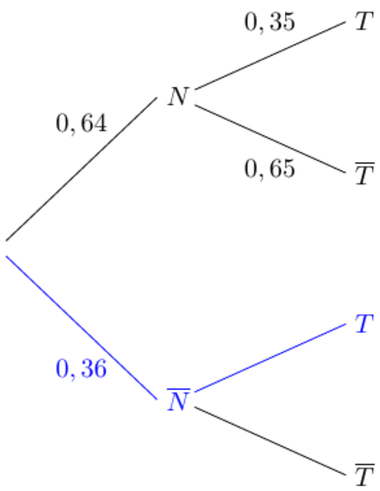
1. On choisit un adhérent au hasard.
Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est 0, 494.

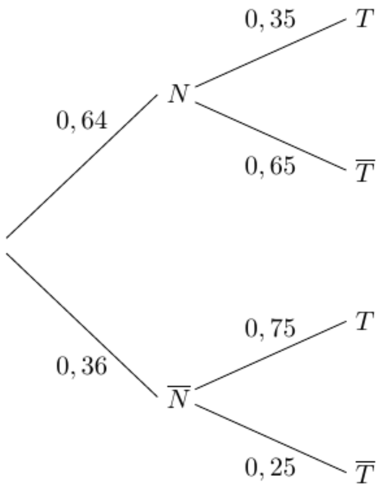
Traduisons les hypothèses de l'énoncé :
Soit N : « la personne interrogée est un nouvel adhérent ».
Soit T : « la personne interrogée a un télescope personnel ».

64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents signifie $p(N) = 0,64$

27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel, donc $p(\overline{N} \cap T) = 0,27$

65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel signifie que $p_N(\overline{T}) = 0,65$.





On complète l'arbre ci-contre avec ces données :
Pour compléter l'arbre on fait le calcul suivant :

$$p_{\overline{N}}(T) = \frac{p(\overline{N} \cap T)}{p(\overline{N})} = \frac{0,27}{0,36} = \frac{3}{4} = 0,75$$

On cherche dans cette question $p(T)$:

D'après l'arbre $p(T) = 0,35 \times 0,64 + 0,75 \times 0,36$

Ainsi $\boldsymbol{p(T) = 0,494}$

---

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent? Arrondir à 10^{-3} près.

On cherche $p_T(N) = \frac{p(N \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}64 \times 0{,}35}{0{,}494}$

Donc $\boldsymbol{p_T(N) \approx 0,453}$ à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

D'après l'énoncé, la probabilité qu'un villageois est favorable est $p = 0{,}5$.

Soit f la fréquence des gens favorables sur un échantillon de $n = 100$ personnes.

$n \geq 30$, $np = 50 = n(1-p)$ donc $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, les conditions d'application du théorème de l'intervalle de fluctuation sont vérifiées, ainsi l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est

$$I = \left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}5 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{100}} ; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{100}}\right]$$

D'où $I = [0{,}402; 0{,}598]$

Lors de la consultation de la population $f = 0{,}54$, on a bien $f \in I$, donc le résultat n'amène pas l'astronome à changer d'avis sur son hypothèse.
