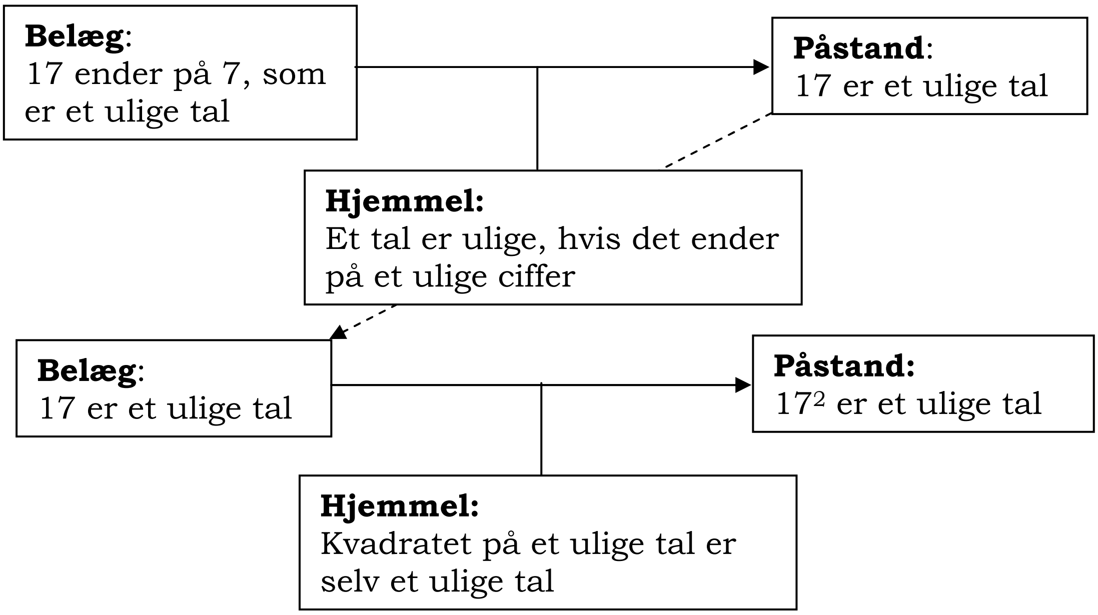
Logik og argumentation

Noter til de to forberedende aktiviteter



Indholdsfortegnelse:

Elevnoter

Lærernoter

Elementær talteori (elevnote)

Indenfor *retorikken* findes der mange forskellige former for argumenter, fx

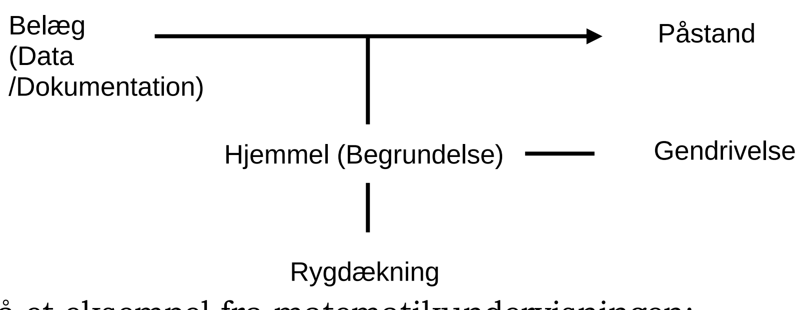
- *Ekspert- eller autoritetsargumentet,* f.eks. ved henvisning til hvad andre videnskabsfolk har udtalt.
- *referencegruppeargumentet,* f.eks. ved at henvise til populære personer.
- *ad-hominem-argumentet,* hvor man f.eks. spiller på at påstanden kommer fra en person, der er kendt for at være pålidelig og ubestikkelig.
- *mængdeargumentet,* f.eks. "ni ud af ti udtaler …", "tusind mennesker kan ikke tage fejl…"
- *den menneskelige historie,* f.eks. ved at fortælle en skæbnehistorie fra det virkelige liv.
- *trusselsargumentet,* som f.eks. handler om de negative konsekvenser, der vil indtræde, hvis man ikke gør som foreslået.
- *lykkeargumentet,* som modsat fremmaner alle de gode ting, der vil ske, hvis afsenderens budskab bliver til virkelighed.

Sådanne argumenter er *ikke* tvingende. De kræver blot, at vi tilslutter os bestemte holdninger, meninger eller at vi tror på argumenter uden nødvendigvis at kunne kontrollere dem. Vi er derfor ikke bundet af sådanne argumenter - selvom det selvfølgelig ofte vil være meget praktisk at lytte til dem.

I matematik (og videnskab i almindelighed) er vi interesseret i at argumentere *tvingende*, dvs. alle skal være bundet af argumentationen, som ikke må afhænge af personlige overbevisninger, holdninger, politiske standpunkter osv. Argumentet skal altså helst være *objektivt*.

Et matematisk tvingende argument kaldes også for et *logisk argument*. Men siger også at man bruger den *deduktive metode*, idet man ud fra nogle grundlæggende antagelser (*hypoteser*) udleder konsekvenser, som må anses for at være ufravigelige.

Matematisk deduktion kan stadigvæk indpasses i Toulmins argumentations model:



Lad os lige se på et eksempel fra matematikundervisningen:

Eksempel:	En vare koster som udgangspunkt 1200 kr. (svarende til butikkens råpris = udgifter + fortjeneste). Dertil kommer moms (25%) og en eventuel rabat. En kunde får tilbudt en rabat på 15%. Er det nu en fordel for kunden at få rabatten trukket fra før eller efter der er lagt moms til råprisen?

Påstand:	A: Jeg vil helst have rabatten trukket fra først! B: Hvorfor det?
Hjemmel:	A: Jo, for jo mindre udgangsprisen for momsen er, jo mindre moms skal jeg jo betale - og så slipper jeg jo billigere!
Gendrivelse:	B: Men får du så ikke også mindre rabat? A: Jo, det kan der selvfølgelig være noget om – hm! Jamen
Ny påstand: **Ny hjemmel:**	så vil jeg helst have trukket rabatten fra sidst, for jo større udgangsprisen er for rabatten, jo mere rabat får jeg!
Ny gendrivelse:	B: Men hvordan kan du så vide hvad der bedst kan betale sig, når du vinder noget på begge måder?
Belæg/data:	A: Lad mig prøve at regne på det: Hvis jeg trækker rabat først, så udgør rabatten 15% af 1200 kr. = 180 kr. Dertil kommer momsen af den nye udgangspris på 1200 kr. – 180 kr. = 1020 kr. Momsen udgør derfor 25% af 1020 kr. = 255 kr. I alt stiger råprisen derfor med 255 kr. – 180 kr. = 75 kr. Hm! Hvis jeg trækker rabatten fra til sidst, så udgør momsen 25% af 1200 kr. = 300 kr. Dertil kommer rabatten af den nye udgangspris på 1200 kr. + 300 kr. = 1500 kr. Rabatten udgør derfor 15% af 1500 kr. = 225 kr. I alt stiger råprisen derfor denne gang med 300 kr. – 225 kr. = 75 kr. Hvad søren? B: Men det er ikke bare det samme?!
Ny påstand (med styrkemarkør)	A: Jo, men så er det da bare *fuldstændigt ligegyldigt* om jeg får trykket rabatten først eller sidst! B: Er det altid det? A: Hm! Hvad var det nu jeg lærte i procentregningen? Når
Nyt belæg:	jeg trækker rabatten på 15% fra et beløb, svarer det til at gange beløbet med 0.85. Når jeg lægger momsen på 25% til et beløb svarer det til at gange beløbet med 1.25. Hm!
Ny hjemmel:	B: Jamen, er det ikke ligegyldigt i hvilken rækkefølge du ganger med de to tal 0.85 og 1.25?
Konklusion:	A: Selvfølgelig faktorernes orden er ligegyldig! Så derfor er det ligegyldigt om jeg får trukket rabatten fra først eller sidst – YES!.

Vi vender os nu mod et simpelt eksempel på et *logisk argument* hentet fra hverdagen:

A: Hvis du går udenfor bliver du våd!
B: Hvorfor det?
A: Fordi det regner!

Her er **påstanden** at man bliver våd, hvis man går udenfor.
Tilsvarende er **belægget**, altså de data, der ligger til grund for påstanden, at det rent faktisk regner.
Hjemlen er så underforstået: **Hvis** det regner (mens man er udenfor), **så** bliver man våd.
I princippet kunne vi nu forsøge os med en **gendrivelse**:

B: Jeg kan da bare tage en paraply med.

Det afgørende er altså at man kan knytte påstanden til en anden påstand, **belægget**, der har den egenskab at **hvis belægget** er sandt trækker det påstanden med sig, dvs. **så** er **påstanden** nødvendigvis også sand.

Matematikkens verden handler dels om tal, dels om figurer. I dette forløb vil vi arbejde med tal. Der findes mange forskellige tal, men vi vil mest beskæftige os med de simpleste tal, tælletallene eller *de naturlige tal*:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

De naturlige tal udgør allerede i sig selv en yderst kompliceret verden, der er i stand til at afspejle de mest forunderlige ting. Det er denne verden vi vil dykke ned i og udforske en lille flig af.

Lige og ulige tal: Tilbage til pythagoræerne har man været fascineret af den rolle de naturlige tal spiller for den skjulte orden i naturen, kunsten osv. Pythagoræerne interesserede sig bl.a. for opdelingen af de naturlige tal i forskellige typer af tal. Den mest fundamentale inddeling i forskellige typer er opdelingen i **lige** og **ulige** tal, hvorved tallene så at sig fik et køn, på samme måde som vi deler mennesker i mænd og kvinder.

Overvej nu følgende øvelse, som vi vil snakke om i fællesskab:

Øvelse 1: **Lige og ulige tal**
Giv eksempler på lige og ulige tal.
Prøv at give en præcis definition af begreberne lige og ulige tal.
Overvej hvordan I kan afgøre om et tal er lige eller ulige: Er tallet 2467 fx lige eller ulige? Husk at begrunde hvorfor i slutter som I gør: Hvad er det man skal kigge efter, når man vil afgøre om et tal er lige eller ulige?
Kan I opstille en formel for et lige tal? kan I opstille en formel for et ulige tal?

Gå herefter sammen i matrixgrupper og overvej de følgende øvelser. Husk, når I diskuterer, at komme med hjemmel og belæg for jeres påstande. Husk at udfordre hinanden med gendrivelser ... Husk også at skrive ned, hvad det er I kommer frem til. Nedskriv mindst ét argument med en påstand, en hjemmel og et belæg. Når i er færdige med øvelsen forklarer I hver for sig en anden gruppe om jeres overvejelser.

Øvelse 2: **Regning med lige og ulige tal**
Hvad sker der, når man regner med lige og ulige tal:
Hvad kan man sige om summen af to lige tal? summen af to ulige tal? summen af et lige og et ulige tal?
Hvad kan man sige om produktet af to lige tal? produktet af to ulige tal? produktet af et lige og et ulige tal?
Hvordan kan man opstille disse regneregler i et skema?
Hvordan kan man bevise disse regneregler, dvs. hvordan kan man overbevise andre om at disse regneregler nødvendigvis er sande?

Kvadrattallene:
Der findes også andre typer tal. Fx var pythagoræerne særligt fascinerede af **kvadrattallene**.

Øvelse 3: **Kvadrattal**:
Giv eksempler på kvadrattal.
Prøv at give en geometrisk tolkning af et kvadrattal.
Det er svært umiddelbart at se på et tal om det er et kvadrattal, men ved hjælp af jeres lommeregner kan I hurtigt afgøre om et tal er et kvadrattal ved at uddrage kvadratroden. Er tallet 4687 fx et kvadrattal? Er tallet 4489 et kvadrattal?

Hvad kan man sige om summen af to kvadrattal: Er det aldrig et kvadrattal? Er det sommetider et kvadrat tal? Er det altid et kvadrattal?
Hvad kan man sige om produktet af to kvadrattal: Er det aldrig et kvadrattal? Er det sommetider et kvadrat tal? Er det altid et kvadrattal?

Øvelse 4: **Kvadrattal og opdelingen i lige/ulige tal:**
Der findes en simpel forbindelse mellem kvadrattal og opdelingen i lige-ulige tal:
Hvad kan I sige om kvadratet på et lige tal?
Hvad kan I sige om kvadratet på et ulige tal?
Hvordan kan I bevise disse regler for kvadratet på et lige tal henholdsvis et ulige tal, dvs. hvordan kan I overbevise andre om at disse regler nødvendigvis er sande?
Hvad kan I sige om et tal, hvis kvadratet på tallet er et lige tal?
Hvad kan I sige om et tal, hvis kvadratet på tallet er et ulige tal?

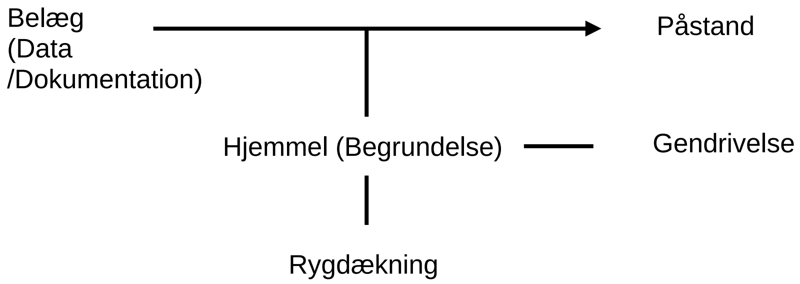
Øvelse 5: **Pythagoræiske kvadrattal**
Pythagoræerne var især fascinerede af de kvadrattal, der kunne skrives som summen af to kvadrattal, fx er kvadrattallet 25 det samme som summen af kvadrattallene 9 og 16. Sådanne kvadrattal vil vi kalde **pythagoræiske kvadrattal**.
Prøv at give en geometrisk tolkning af de pythagoræiske kvadrattal.
Prøv nu at opskrive de ti første kvadrattal i rækkefølge:
Hvad kan I sige om forskellen mellem disse tal (dvs. træk det første fra det andet, det andet fra det tredje osv.)?
Kan I argumentere for denne påstand?
Hvis forskellen på to kvadrattal selv er et kvadrattal, så har I fundet et pythagoræisk kvadrattal. Find de første fem pythagoræiske kvadrattal på denne måde. Hvilke retvinklede trekanter svarer de til? Kan I skrive en formel op for disse trekanter?
Findes der uendeligt mange pythagoræiske kvadrattal? Hvordan kan I argumentere for denne påstand?

Matematik og argumentationsteori (elevnote)

Matematisk deduktion og Toulmins model for redelig argumentation

Vi minder om at et matematisk tvingende argument også kaldes for et *logisk argument*. Men siger også at matematikken bruger den *deduktive metode*, idet man ud fra nogle grundlæggende antagelser (*hypoteser*) udleder konsekvenser, som må anses for at være ufravigelige.

Matematisk deduktion kan indpasses i Toulmins argumentations model:



Vi så sidste gang på et simpelt eksempel på et *logisk argument* hentet fra hverdagen:

A: Hvis du går udenfor bliver du våd!
B: Hvorfor det?
A: Fordi det regner!

Her er **påstanden** at man bliver våd, hvis man går udenfor.
Tilsvarende er **belægget**, altså de data, der ligger til grund for påstanden, at det rent faktisk regner.
Hjemlen er så underforstået: **Hvis** det regner (mens man er udenfor), **så** bliver man våd.
I princippet kunne vi nu forsøge os med en **gendrivelse**:

B: Jeg kan da bare tage en paraply med.

Det afgørende er altså at man kan knytte påstanden til en anden påstand, **belægget**, der har den egenskab at **hvis belægget** er sandt trækker det påstanden med sig, dvs. **så** er **påstanden** nødvendigvis også sand.

I matematik kalder man ofte **påstanden** for q og **belægget** for p:

q = "Når du går udenfor, bliver du våd"
p = "Det regner"

Hjemlen er den regel, der forbinder de to udsagn og tillader os at slutte fra det ene udsagn til det andet:

$p \Rightarrow q$ (som læses: 'p **medfører** q' eller '**hvis** p **så** q')

(dvs. hvis det regner, så bliver du våd, når du går udenfor).

Den generelle skabelon for et typisk logisk argument ifølge Toulmin ser derfor således ud i matematikken:

Præmisser: Udsagnet p er sandt (**belægget**)
Udsagnet p medfører udsagnet q (**hjemlen**)
Konklusion: Altså er også udsagnet q sandt (**påstanden**).

Eksempler fra talteorien:
Lad os tage et eksempel fra talteorien, som vi så nærmere på sidste gang:

Påstand: 17^2 er et ulige tal
Hjemmel: Kvadratet på ethvert ulige tal er selv et ulige tal, dvs. hvis et tal er ulige, så er kvadratet på tallet også ulige.
Belæg: 17 er et ulige tal

Fordi 17 er et ulige tal, og fordi kvadratet på ethvert ulige tal er et ulige tal følger det altså, at 17^2 er et ulige tal.

Vi kunne selvfølgelig også bare regne 17^2 ud og derefter checke om det var et ulige tal. Men nu ville vi jo i stedet prøve at argumentere :-)

Et sådant argument kan optrævles yderligere. F.eks. kan vi spørge: Hvorfor skal vi tro på **belægget**, dvs. hvorfor skal vi tro på at 17 er et ulige tal?

Påstand: Tallet 17 er et ulige tal
Hjemmel: Et tal er ulige, hvis det ender på et ulige ciffer, dvs. 1, 3, 5, 7 eller 9
Belæg: Tallet 17 ender på 7, som er et ulige ciffer

Tilsvarende kan vi selvfølgelig spørge om hvorfor vi skal tro på **hjemlen**?

Påstand: Kvadratet på ethvert ulige tal er et ulige tal
Hjemmel: Det sidste ciffer i kvadrattallet stammer fra kvadratet på det sidste ciffer i tallet
Belæg: Kvadratet på et ulige ciffer er ulige: $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 5$, $7^2 = 4^9$, $9^2 = 81$

Og sådan kan man blive ved! Men i praksis behøver man kun gå så langt tilbage, at de diskuterende er enige om **belægget** og **hjemlen**. I matematik støtter man sig altså til sætninger, der allerede er velkendte, fordi de allerede er bevist.

Her er et mere kompliceret argument, som ikke handler om et konkret tal, og hvor vi derfor er nødt til at argumentere mere abstrakt:

Påstand: Hvis et kvadrat tal x^2 er lige, må tallet x selv være lige
Hjemmel: Kvadratet på et ulige tal er ulige.
Belæg: Ethvert tal er enten lige eller ulige.

Dette er et såkaldt *modstridsargument*: Der er kun to muligheder: Enten er x lige eller også er x ulige. En af delene må være sand. Vi viser nu at den anden er falsk. Derfor må den første være sand! Men som vi har set har vi **hjemmel** til at slutte, at hvis x er ulige så er x^2 også ulige. Det er i modstrid med, at vi ved at x^2 er lige og et tal kan jo ikke både være lige og ulige. Heraf følger det derfor, at antagelsen er falsk, dvs. x kan ikke være ulige. Men hvis x ikke kan være ulige, så må x være lige.

Logikken som et matematisk sprog: Logiske bindeord og sandhedstavler

Her har vi støttet os til nogle af de mest fundamentale principper for logisk argumentation:

> Et logisk udsagn er et udsagn, som enten er sandt eller falsk.
> Et logisk udsagn kan ikke både være sandt og falsk på samme tid.

Når man i moderne logik ønsker at holde styr på sådan argumenter indfører man **sandhedstavler**: Et logisk udsagn er som sagt en påstand som enten er sand eller falsk. I TI-Nspire kaldes disse sandhedsværdier for **true** og **false**:

$2+3=5$	true
$5^2=24$	false

Læg mærke at TI-Nspire netop opfatter et udsagn af formen udtryk1 = udtryk2 som et logisk udsagn, der enten er sandt eller falsk. I begge tilfælde kan vi umiddelbart udregne begge sider og se om udsagnene er sande eller falske. Men vi kan i mange tilfælde også argumentere os frem til sandhedsværdien, fx

$237^2=57188$	false

Dette udsagn må nødvendigvis være falsk, fordi 237^2 er et ulige tal og 57188 er et lige tal. Der er derfor ingen grund til at udregne tallene for at afgøre sandhedsværdien.

I den matematiske logik kan man nu kombinere udsagn lidt på samme måde som i dagligdags tale: Her anvender man de logiske bindeord: *'og'*, '*eller*', '*ikke*' som har en præcis betydning, og som derfor i TI-Nspire udtrykkes med de engelske ord **and**, **or** og **not**:

not $(2+3=5)$	false
not $(5^2=24)$	true
$2+3=5$ or $5^2=24$	true
$2+3=5$ and $5^2=24$	false

Fx betyder udsagnet **not** (2+3=5) at tallet 2 +3 *ikke* er det samme som tallet 5 - og det er jo en forkert påstand!

Udsagnet 2+3=5 **or** 5^2 = 24 betyder tilsvarende at enten er tallet 2+3 det samme som tallet 5 eller også er tallet 5^2 det samme som tallet 24; dvs. mindst et af udsagnene er sande – og det er jo korrekt, idet det første udsagn er sandt.

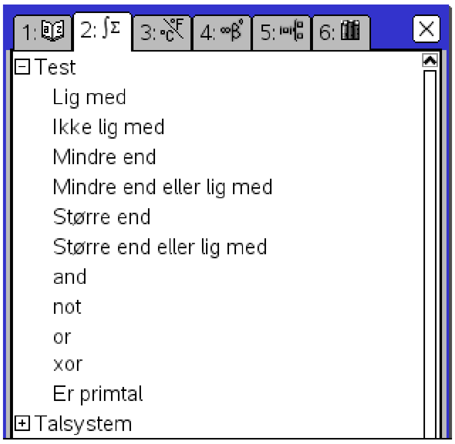
I almindelighed har de logiske bindeord **not**, **or** og **and** altså den følgende betydning:

Påstanden	**not** *p*	betyder at	udsagnet *p* er falsk.
	p **or** *q*		mindst et af udsagnene *p* og *q* er sande, dvs. **enten** er *p* sand **eller** også er *q* sand (gerne dem begge!).
	p **and** *q*		begge udsagnene er sande, dvs. **både** *p* **og** *q* er sande.

I almindelig tale vil **or** altså typisk oversættes med **enten** – **eller**, eller bare med **eller**. Tilsvarende vil **and** oversættes med **både - og** eller bare med **og**.

Det rejser et mindre problem: Når vi i almindeligt sprog bruger vendingen 'enten eller' bruger vi den sommetider i betydningen "enten er det ene sandt eller også er det andet sandt, men de kan ikke begge være sande". Hvis vi fx ser navnet Alaya på en navneliste så kan vi slutte at Alaya enten er navnet på en pige eller på en dreng. Men i dette tilfælde er det klart at Alaya ikke både kan være en pige eller en dreng. Man siger vi bruger det **ekslusive enten eller**, som altså indebærer at netop et af udsagnene holder. I matematisk logik bruger man da bindeordet **xor** (som er en sammentrækning af e**X**clusive **OR**).

Der findes ikke andre indbyggede logiske bindeord i TI-Nspire, hvilket vi kan se af listen i kataloget. Men får vi brug for flere kan vi selv definere dem!



Når man arbejder med *sammensatte* logiske udsagn er det nemmest at undersøge deres sandhedsværdi ved hjælp af en **sandhedstavle**. Hvis man fx har to *elementære udsagn p* og *q* så opskriver man en liste over de fire mulige kombinationer af sandhedsværdier for de to udsagn:

	A p_data	B q_data	C p_and_q_data
◆			=p_data and q_data
1	true	true	true
2	true	false	false
3	false	true	false
4	false	false	false

Vi ser da netop at det *sammensatte udsagn p* **and** *q* kun er sandt, når begge udsagnene er sande.

Øvelse 1. De elementære sandhedstavler
Opbyg nu selv sandhedstavler for de logiske bindeord **or, xor** og **not**.

Normalt kan et sammensat udsagn både være sandt eller falsk afhængigt af de enkelte udsagns sandhedsværdier. Men der findes sammensatte udsagn, der altid er sande uafhængigt af de enkelte deludsagns sandhedsværdier. Prøv fx at opbygge sandhedstavlen for udsagnet *p* **or not** *p*. Sådanne udsagn kaldes **tautologier** (dvs. selvindlysende sandheder). Kan du finde andre eksempler på sammensatte udsagn, der altid er sande?

Tilsvarende findes der sammensatte udsagn, der altid er falske uafhængigt af de enkelte deludsagns sandhedsværdier. Prøv fx med udsagnet *p* **and not** *p*. Sådanne udsagn kaldes for **kontradiktioner** (selvmodsigelse). Kan du finde andre eksempler på udsagn, der altid er falske?

Øvelse 2. Logiske kombinationer

Hvor mange sandhedstavler kan man i alt opbygge ud fra to deludsagn *p* og *q*?

	A p_data	B q_data	C sus1	D sus2	E sus3	F	G
◆							
1	true	true	true	false	true		
2	true	false	true	true	false		
3	false	true	true	true	false		
4	false	false	true	true	false		

(SUS står for Sammensat UdSagn)

Hvor mange af disse sammensatte udsagn er *symmetriske*, dvs. de ikke afhænger af rækkefølgen for *p* og *q*?

Kan du opbygge sandhedstavler, der matcher alle de ovenstående ved at kombinere p og q med de logiske bindeord **not**, **or** og **and** (og såmænd også gerne **xor**)?

Den logiske implikation: Hvis ... så ...

Vi er nu kommet til det mest centrale logiske udsagn i argumentationsteorien:

p **medfører** *q* der er det samme som **hvis** *p* **så** *q*

(dvs. det er netop hjemlen i en logisk argumentationskæde). Den vil vi betegne med det engelske ord **imply** (som er beslægtet med det danske ord implicere, der netop betyder 'medføre'). Vi skal da først prøve at forstå hjemlens betydning, dvs. **hvornår er det rigtigt, at *p* medfører *q* og hvornår er det forkert?**

Det er i hvert fald klart, at hvis *p* er sand, så skal også *q* være sand. Konklusionen *q* må derfor aldrig være falsk, samtidigt med at forudsætningen *p* er sand. Det kunne vi oversætte med **not** (*p* **and not** *q*). Det fører nu til de to følgende rækker i sandhedstavlen:

	A p_data	B q_data	C p_imply_q_data
◆			
1	true	true	true
2	true	false	false
3	false	true	
4	false	false	

Men hvad gør vi hvis *p* er falsk? Kan vi så slutte noget om *q*? Nej, hvis *p* ikke er sand, så er det ligegyldigt hvad *q* er – vi kan ikke vide noget om det, for hvis *p* er falsk er kæden allerede hægtet af vores argument!

Antag fx den følgende **hjemmel** gælder:

Hvis det regner, **så** bliver du våd, når du går udenfor!

Hvad kan vi så slutte? Ja, hvis det regner og vi går udenfor, ja så er det klart at vi bliver våde!

Men hvad nu, hvis vi går udenfor og vi bliver våde (dvs. *q* er sand)? Kan vi så slutte at det regner (dvs. at *p* er sand)? Nej, for vi kunne også blive våde af andre grunde end at det regner, fx fordi vi blev blændet af det strålende solskin og faldt i naboens svømmebassin.

Vi kan altså *ikke* slutte baglæns: Hvis *q* er sand, så kan *p* såvel være sand som falsk! Af samme grund kan vi heller ikke slutte noget, hvis *p* er falsk, for så siger reglen ikke noget! Vi er altså tilbage ved at påstanden '**hvis** *p* **så** *q*' alene kan bruges til at drage en slutning, hvis vi enten ved at *p* er sand (for så trækker den *q* med sig) eller hvis vi ved at *q* er falsk (for så forhindrer den udsagnet *p* i at være sand). Det kan også formuleres således:

Enten er *p* falsk eller også er *q* sand, dvs. **not** *p* **or** *q*.

Igen bygger det på modstridsargumentet! Vi skal vise, at hvis udsagnet *p* er sandt, så er også udsagnet *q* sandt. Men hvis *p* er sandt, så er det første udsagn forkert, og derfor må det andet være rigtigt, dvs. udsagnet *q* er sand.

Det fører til den følgende sandhedstavle for udsagnet *p* **medfører** *q:*

	A p_data	B q_data	C p_imply_q_data
◆			
1	true	true	true
2	true	false	false
3	false	true	true
4	false	false	true

En anden måde vi kan indføre det nye udsagn på er ved at knytte det til vores tidligere udsagn. Vi har allerede set på to muligheder:

not *p* **or** *q*
not (*p* **and not** *q*)

Men det er bare to forskellige måder at sig det samme på. Faktisk omskriver TI-Nspire helt automatisk det nederste udsagn til det øverste:

not $(p$ and not $q)$	not p or q

Tilsvarende kan vi se at de har nøjagtigt den samme sandhedstavle (som netop er magen til den sandhedstavle vi skrev op for *p* **medfører** *q*):

	A p_data	B q_data	C notporq_data	D notnotpandq_data
◆			=(not p_data) or q_data	=not(p_data and not q_data)
1	true	true	true	true
2	true	false	false	false
3	false	true	true	true
4	false	false	true	true

Vi kan altså *definere* udsagnet *p* **medfører** *q* til at betyde det samme som udsagnet **not** *p* **or** *q*. I TI-Nspire skrives det således i **grafregneren**:

Define $imply(p,q)$=not p or q	*Udført*
$imply(p,p)$	true

Så snart vi har defineret **imply**-kommandoen kan vi få **TI-Nspire** til at opstille sandhedstavlen for kommandoen.

Dermed kan vi udnytte bindeordet imply på lige fod med de andre logiske bindeord!

	A p_data	B q_data	C p_imply_q_data
◆			=imply(p_data,q_data)
1	true	true	true
2	true	false	false
3	false	true	true
4	false	false	true

Om kærlighed og logik

At Smørrebrød er ikke Mad,
Og Kierlighed er ikke Had,
Det er for Tiden hvad jeg veed
Om Smørrebrød og Kierlighed.
Johan Herman Wessel

Lad os nu illustrere maskineriet med en logisk slutning om kærlighed helt i Shakespeares ånd:

Jespers dilemma: Om Jesper har vi følgende to facts:
(1) Enten elsker Jesper Lise eller også elsker Jesper Hanne
(2) Hvis Jesper elsker Lise, så elsker Jesper også Hanne
Kan vi nu slutte at Jesper elsker Lise?
Kan vi slutte at Jesper elsker Hanne?

Det kan godt være lidt svært at overskue, men så kan vi jo prøve os frem med sandhedstavler! Først skal vi have indført de elementære udsagn

"Lise" = Jesper elsker Lise
"Hanne" = Jesper elsker Hanne

Da et navn i Lister og regneark kun må indeholde 16 tegn afkorter vi udsagnene som vist, så hvis udsagnet "Lise" er sand, betyder det altså at Jesper elsker Lise osv.

Dernæst skal i have indført de sammensatte udsagn

L_eller_H = Lise or Hanne (dvs. første fact!)
L_medfører_H = Lise medfører Hanne (dvs. andet fact).

Endelig skal vi have oversat reglen om at vi kan stole på begge facts!

Regel = (L_eller_H) and (L_medfører_H)

dvs. reglen hævder at begge udsagnene er sande. Men så er det bare at indskrive sandhedsudsagnene i sandhedstavler og checke dem!

For det første ved vi, at vi netop lever i et af de følgende fire universer:

	A lise	B hanne
◆		
1	true	true
2	true	false
3	false	true
4	false	false

For at komme tættere på hvilke af disse mulige universer, vi rent faktisk lever i indfører vi nu sandhedstavlerne for de sammensatte udsagn:

	A lise	B hanne	C l_eller_h	D l_medfører_h
◆			=lise or hanne	=imply(lise,hanne)
1	true	true	true	true
2	true	false	true	false
3	false	true	true	true
4	false	false	false	true

Her kunne vi faktisk godt afgøre det, men lad os for klarheds skyld også indføre reglen:

	A lise	B hanne	C l_eller_h	D l_medfører_h	E regel
◆			=lise or hanne	=imply(lise,hanne)	=l_eller_h and l_medfører_h
1	true	true	true	true	true
2	true	false	true	false	false
3	false	true	true	true	true
4	false	false	false	true	false

Vi ser da at det kun er i det første og tredje univers at reglen holder. Vi lever altså enten i univers 1, hvor Jesper elsker dem begge, eller i univers 3, hvor Jesper kun elsker Hanne. Konklusionen er derfor den følgende:

Det eneste vi med sikkerhed kan slutte er, at Jesper elsker Hanne!

I det foregående gennemførte vi nu et rent **mekanisk argument** for at Jesper faktisk elsker Hanne (hvis han ellers skulle være i tvivl ☺). Men vi kunne også have argumenteret klassisk logisk for det:

Først et **direkte argument**:

Påstand: Jesper elsker Hanne
Belæg: Enten elsker Jesper Lise eller også elsker Jesper ikke Lise!
Hjemmel: Fact 1: Jesper elsker mindst en af dem.
Fact 2: Hvis Jesper elsker Lise elsker han også Hanne.

Argumentet er så som følger:

Belægget er ubestrideligt sandt!
Hvis Jesper elsker Lise, følger det af fact 2, at han også elsker Hanne. Hvis Jesper ikke elsker Lise, følger det af fact 1, at så må han nødvendigvis elske Hanne.
Hvad enten han elsker Lise eller ikke elsker Lise kan vi altså være sikre på at han elsker Hanne!

Dernæst et **indirekte argument** (modstridsargument):

Antag at Jesper *ikke* elsker Hanne (hypotesen).
Af fact 1 følger da, at han nødvendigvis elsker Lise.
Men af fact 2 følger så, at han også elsker Hanne, hvilket er i modstrid med vores antagelse. Da vores antagelse fører til en modstrid er den forkert, dvs. Jesper må nødvendigvis elske Hanne.

Påstanden: Jesper elsker ikke Hanne, kan altså **gendrives** ud fra **hjemlen**: Fact 1 og Fact 2.

Læg mærke til hvordan vi anvender den hypotetisk-deduktive metode i begge tilfælde!

Øvelse 3: Denne gang spørger vi Jesper: 'Er det virkeligt sandt, at hvis du elsker Lise, så elsker du også Hanne?'
Hertil svarer Jesper: 'Hvis det virkeligt er sandt, så elsker jeg Lise!'
Er Jesper forelsket i Lise? Er han forelsket i Hanne?
NB! Denne gang må vi altså *ikke* støtte os på de to tidligere facts 1 og 2.

Øvelse 4:
Når vi spørger Jesper: 'Er det virkeligt sandt, at hvis du elsker Lise, så elsker du også Hanne?'
svarer Jesper: 'Hvis det virkeligt er sandt, så elsker jeg Lise, og hvis jeg elsker Lise, så er det virkeligt sandt!'
Hvem er Jesper nu forelsket i?

Øvelse 5: Denne gang er der tre piger på spil: Susanne, Marcia og Diana.
Vi har nu følgende facts til rådighed:
(1) Jesper er forelsket i mindst en af pigerne.
(2) Hvis Jesper elsker Susanne, men ikke elsker Diana, så elsker han også Marcia.
(3) Jesper elsker enten både Diana og Marcia eller også elsker han hverken Diana eller Marcia!
(3) Hvis Jesper elsker Diana, så elsker han også Susanne.
Hvem er Jesper forelsket i?

Kommentarer til elementær talteori (lærernote):

Øvelse 1:
Eksemplerne burde ikke volde problemer!
Der kan selvfølgelig gives mange definitioner/karakteriseringer af lige og ulige tal, fx

1) Hver andet tal er lige, startende med 2. Tilsvarende er hver andet tal ulige startende med 1.
2) De lige tal er dem, der kan deles med 2 …
3) De lige tal er dem der ender på cifrene 0, 2, 4, 6 og 8, dvs. de lige cifre.
4) Hvis tallet repræsenteres med en bunke kugler er det lige, når bunken kan deles i to lige store bunker …

   Lige tal: oooo|oooo
   Ulige tal: ooo ϕ ooo

5) Endelig bør de prøve at forstå formlerne for lige og ulige tal:

$$\text{Lige} = 2\cdot n$$
$$\text{Ulige} = 2\cdot m + 1$$

   dvs. et tal er lige, netop når det kan skrives på formen $2\cdot n$, …

Det giver mulighed for små argumenter/beviser, fx:

Påstand: Et lige tal er et tal, der ender på 0, 2, 4, 6 og 8.
Hjemmel: Tallet 2 går op i et tal, netop når det går op i sidste ciffer.
Belæg: Et lige tal, er et tal, der kan deles med 2 (definitionen på et lige tal)
Rygdækning: Ethvert decimaltal kan skrives som en sum af enere, tiere, hundreder osv. Fx $2467 = 2\cdot1000 + 4\cdot100 + 6\cdot10 + 7$. Men tallet 2 går op i 1000, 100 og 10. Altså går 2 op i tallet netop når det går op i enerne.

Øvelse 2:
På basis af konkrete eksempler skal de nu selv kunne opstille skemaerne:

+	lige	ulige
lige	lige	ulige
ulige	ulige	lige

·	lige	ulige
lige	lige	lige
ulige	lige	ulige

Det er sværere at argumentere for dem – og de kan måske have svært ved at se hvorfor konkrete eksempler ikke kan være nok! Det kan evt. føre til en snak om induktionsprincippet: Hvorfor er det ikke nok at kende nogle få eksempler for at kunne generalisere til den almene opførsel.

Her er tre eksempler, hvor de to første er elementære, mens det tredje er avanceret (men inden for rækkevidde af et studieretningsprojekt):

Eksempel 1: Et tal kaldes for symmetrisk eller et palindrom, hvis tallet er det samme uanset om det læses forlæns eller baglæns, fx 247742. Hvis cifrene er ens er tallet selvfølgelig trivielt symmetrisk. Kig nu på de følgende kvadrater:

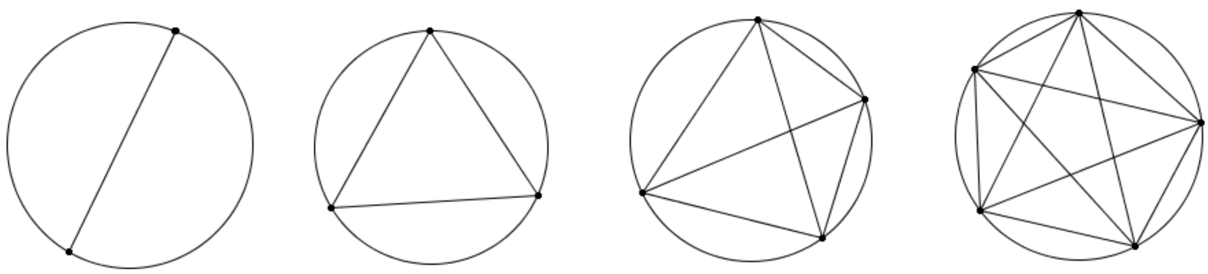
	A ettaller	B kvadrat
◆		=ettaller^2
1	1	1
2	11	121
3	111	12321
4	1111	1234321
5	11111	123454321
6	111111	12345654321
7	1111111	1234567654321
A6	=10•a5+1	

Alt ånder fred og ro, så tilsyneladende er ethvert kvadrattal på formen $1111...111^2$ et symmetrisk tal?

Bemærkning: Kvadrattallene har også en meget simpel struktur, hvor vi først skriver cifrene op i den naturlige rækkefølge 123... og derefter i den modsatte rækkefølge ...321. Men her kunne man godt være nervøs, når eksponenten bliver stor. Det skulle dog ikke forstyrre vores symmetri?

Læg mærke til celleformlen. Den tillader os at trække i en celle i nederste højre hjørne så man automatisk får skrevet det næste tal i søjlen for ettaller op og derfor også automatisk udregnet kvadrattallet.

Eksempel 2: Denne gang er eksemplet geometrisk. Vi tegner en cirkel med et antal punkter på randen. Derefter forbindes randpunkterne så vi får dannet den tilsvarende polygon med alle de tilhørende diagonaler. Vi tæller nu, hvor mange områder cirklen er blevet opdelt i:



$n = 2$ $n = 3$ $n = 4$ $n = 5$

Er der et system i tallene?
Læg mærke til den åbne formulering. Når vi tegner sekskanten er det ikke sikkert vi får det maksimale antal områder, fordi tre diagonaler nu godt kan gå gennem samme punkt. Det gælder fx for den regulære sekskant. Men selvom vi insisterer på at tælle det *maksimale antal områder* bryder reglen hurtigt sammen!

Eksempel 3: (kun for mat-fysser og nok ikke i 1g).
I forbindelse med kvadratreglerne har de lært at faktorisere andengradspolynomier. Her vil vi nu faktorisere polynomier af formen $x^n - 1$. De første tyve faktoriseringer ser således ud:

$n:=1::\text{factor}(x^n-1)$	$x-1$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^2+x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^6+x^3+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^4-x^3+x^2-x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)\cdot(x^4-x^2+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)\cdot(x^6+x^3+1)\cdot(x^6-x^3+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
$n:=n+1::\text{factor}(x^n-1)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^4-x^3+x^2-x+1)\cdot(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

Der er et væld af observationer man kan gøre, nogle trivielle og korrekte, andre mere subtile. Men her vil vi kun hæfte os ved en meget simpel observation:

Alle faktorerne er polynomier, hvor koefficienterne enten er -1, 0 eller 1.

Gælder det altid?

(Eksemplet stammer fra en sød artikel med titlen: "Så du troede hundrede eksempler var nok?" Den første undtagelse dukker op for n = 105!

$$\text{factor}(x^{105}-1) =$$

$$(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)\cdot(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)\cdot$$
$$(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7-x^6+x^5-x+1)\cdot$$
$$(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2\cdot x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+$$
$$x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2\cdot x^7-x^6-x^5+x^2+x+1)$$

I den sidste parentes dukker dels $-2\cdot x^{41}$ op, dels $-2\cdot x^7$)

De har forskellige karakteriseringer af lige ulige tal, der kan gå ud fra, når de skal prøve at vise reglerne:

3) De lige tal er dem der ender på cifrene 0, 2, 4, 6 og 8, dvs. de lige cifre.
4) Hvis tallet repræsenteres med en bunke kugler er det lige, når bunken kan deles i to lige store bunker …

   Lige tal: oooo | oooo

   Ulige tal: ooo ȯ ooo
5) Endelig bør de prøve at forstå formlerne for lige og ulige tal:

   $$\text{Lige} = 2\cdot n$$
   $$\text{Ulige} = 2\cdot m + 1$$

   dvs. et tal er lige, netop når det kan skrives på formen $2\cdot n$, …

Hvis de hæfter sig ved de sidste cifre følger reglerne af de almindelige regnetabeller, idet det sidste ciffer i en sum jo altid stammer fra summen af de to sidste cifre og tilsvarende for et produkt:

+	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
0	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	2	4	6	8	10	3	5	7	9	11
4	4	6	8	10	12	5	7	9	11	13
6	6	8	10	12	14	7	9	11	13	15
8	8	10	12	14	16	9	11	13	15	17
1	1	3	5	7	9	2	4	6	8	10
3	3	5	7	9	11	4	6	8	10	12
5	5	7	9	11	13	6	8	10	12	14
7	7	9	11	13	15	8	10	12	14	16
9	9	11	13	15	17	10	12	14	16	18

·	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	12	16	2	6	10	14	18
4	0	8	16	24	32	4	12	20	28	36
6	0	12	24	36	48	6	18	30	42	54
8	0	16	32	48	64	8	24	40	56	72
1	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	0	6	12	18	24	3	9	15	21	27
5	0	10	20	30	40	5	15	25	35	45
7	0	14	28	42	56	7	21	35	49	63
9	0	18	36	54	72	9	21	45	63	81

Hvis de hæfter sig ved diagrammerne ser det således ud: **Summen af to tal** fås ved at slå bunkerne sammen:

```
  Lige tal:  oooo | oooo
  Lige tal:   ooo | ooo
```

Der er ikke nogen i midten, så den samlede bunke repræsenterer et lige tal.

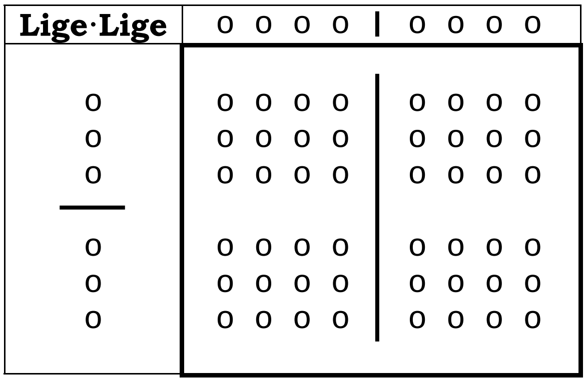
```
  Lige tal:  oooo | oooo
 Ulige tal:   ooo o ooo
```

Der er netop en kugle i midten, så den samlede bunke repræsenterer et ulige tal.

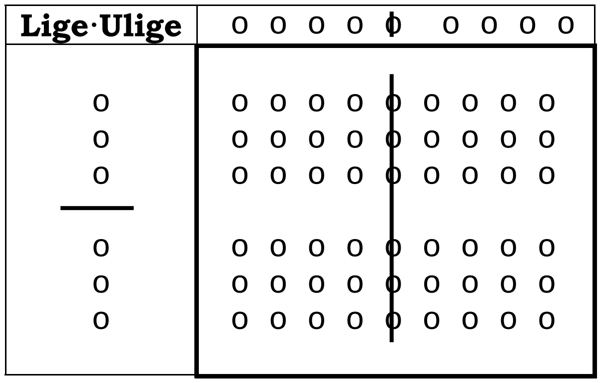
```
 Ulige tal:  oooo o oooo
 Ulige tal:   ooo o ooo
```

Der er to kugler i midten, der kan fordeles på hver sin side, så den samlede bunke repræsenterer et lige tal.

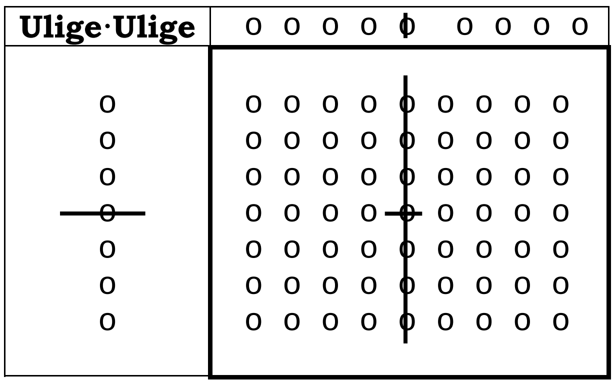
Produktet af to tal fås ved i stedet at kombinere bunkerne til et rektangel som vist:



Midterstregen fra den ene af faktorerne kan overføres til blokken. Der er ingen kugler i midten, så produktet er <u>et lige tal</u>.



Midterstregen fra den ulige faktor overføres til blokken. Der er et lige antal kugler i midten svarende til den anden faktor, så produktet er <u>et lige tal</u>.



Midterstregen fra den ene af faktorerne kan overføres til blokken. Der er et ulige antal kugler i midten, så når de fordeles til hver sin side, bliver den midterste til overs. Produktet er derfor <u>et ulige tal</u>.

Hvis de endelig hæfter sig ved formlerne ser det således ud:

+	2n	2m+1
2p	2p + 2n = 2·(p+n)	2p + 2m+1 = 2·(p+m) + 1
2p+1	2p+1 + 2n = 2·(p+n) + 1	2p+1 + 2m+1 = 2·(p+m+1)

·	2n	2m+1
2p	2p·2n = 2·(2pn)	2p·(2m+1) = 2·(p·(2m+1))
2p+1	(2p+1)·2n = 2·((2p+1)·n)	(2p+1)·(2m+1) = 4pm + 2p + 2m +1 = 2·(2pm + p + m) +1

Øvelse 3: Eksempler på kvadrattal burde ikke være noget problem. Den geometriske tolkning knytter kvadrattallet x^2 til arealet af et kvadrat med siden x:

```
                          oooo
                   ooo    oooo
           oo      ooo    oooo
    o      oo      ooo    oooo
```

Kvadrattallene kan også bygges op med kuglediagrammer i den pythagoræiske tradition.

For at afgøre om tallet 4687 er et kvadrattal kan man uddrage kvadratroden!

$\sqrt{4687}$	68.4617
$\sqrt{4489}$	67.

I dette tilfælde finder vi altså at 4687 ikke er et kvadrattal, mens 4489 er et kvadrattal. med lidt fornemmelse for tallene kan man også hurtigt afgøre det: Tallet deles i blokke bagfra med 2 cifre i hver (hvor der eventuelt kun bliver et ciffer til overs i den forreste blok):

46|87

Vi ved da, at 4687 må være kvadratet på et tal af formen 6|? idet $6^2 = 36$ og $7^2 = 49$. men der er ingen cifre, hvis kvadrattal ender på 7. Så 4687 kan ikke være et kvadrattal.

Tilsvarende fås

44|89

Vi ved da, at 4489 må være kvadratet på et tal af formen 6|? idet $6^2 = 36$ og $7^2 = 49$. Da kvadratet på det sidste ciffer skal ende på 9 er der kun to muligheder: 63 og 67:

$63^2 = (60+3)^2 = 3600 + 180 + 180 + 9 = 3600 + 369 = 3969$ (duer ikke)

$67^2 = (60+7)^2 = 3600 + 420 + 420 + 49 = 3600 + 889 = 4489$ (duer!)

Summen af to kvadrattal: Det skulle være overkommeligt at finde eksempler, der virker og eksempler, der ikke virker. Det er fint at koble til Pythagoras sætning! Fx $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, ...

Produktet af to kvadrattal: her skulle de gerne indse at det altid selv er et kvadrattal: Eks. $4 \cdot 9 = 36 = 6^2$. Her er det nok nemmest at vise det med bogstaver:

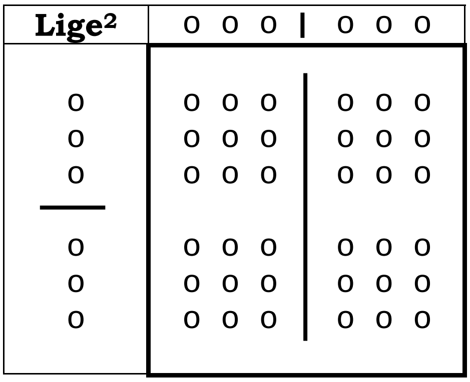
$$p^2 \cdot q^2 = (p \cdot q)^2$$

Øvelse 4: her kan de eventuelt trække på de tidligere øvelser, men det er ikke for alvor afgørende at de har lavet de tidligere øvelser.
Kvadratet på et lige tal er lige, fordi lige·lige = lige.
Kvadratet på et ulige tal er ulige, fordi ulige·ulige = ulige.
Ved cifferregning vises det således

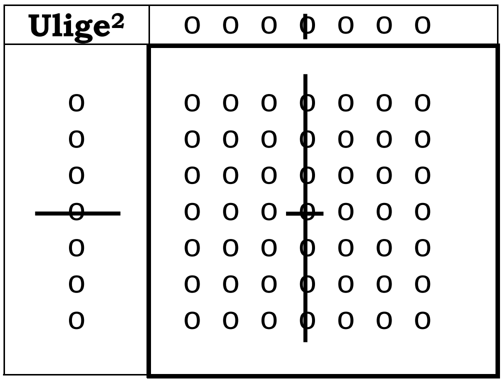
x	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
x^2	0	4	$1\underline{6}$	$3\underline{6}$	$6\underline{4}$	1	9	$2\underline{5}$	$4\underline{9}$	$8\underline{1}$

Det er bemærkelsesværdigt at slutcifret ikke kan være 2 eller 8 eller 3 eller 7!

Ved kuglediagrammer vises det således:



Midterstregen fra den ene af faktorerne kan overføres til blokken. Der er ingen kugler i midten, så kvadratet er <u>et lige tal</u>. Det store kvadrat er opbygget af fire små kvadrater!



Midterstregen fra den ene af faktorerne kan overføres til blokken. Der er et ulige antal kugler i midten, så når de fordeles til hver sin side, bliver den midterste til overs. Kvadratet er derfor <u>et ulige tal</u>.

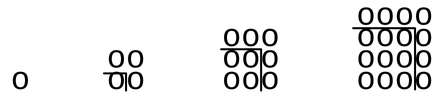
Ved formler vises det således:
Kvadratet på et lige tal: $(2n)^2 = 2n\cdot 2n = 4\cdot n^2 = 2\cdot (2n^2)$
Kvadratet på et ulige tal:
$$(2n+1)^2 = (2n+1)\cdot(2n+1) = 4n^2+2n+2n+1 = 2\cdot(2n^2+2n)+1$$
Det sidste er tricket og kræver et modstridsargument! Hvis kvadratet på et tal er et lige tal, så kan tallet ikke være ulige! For kvadratet på et ulige tal er ulige…

Øvelse 5: Forbindelsen til pythagoras sætning skulle være problemfri.

tal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kvadrattal	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
differens	3	5	7	9	11	13	15	17	19	…

De skulle gerne kunne genkende de ulige tal! Det er nok sværere at argumentere for det: Først er der de generelle regler for lige og ulige tal. De sikrer at hver andet kvadrattal er lige og hvert andet kvadrattal er ulige. Når vi regner på differensen er det derfor enten et ulige kvadrattal vi trækker fra et lige eller et lige kvadrattal vi trækker fra et ulige. Det viser at differensen altid er ulige. Det er også klart at den er voksende. Men at den giver alle de ulige tal kræver et yderligere argument!

Ved hjælp af et diagram fås:



Ved opdeling som vist ses netop at ethvert kvadrattal rummer det foregående samt at forskellen netop består af to sider i det foregående og en ekstra hjørne-kugle. Det viser netop hvorfor vi får de ulige tal!

Endelig kan vi vise det med en formel:

$$(x+1)^2 - x^2 = (x+1)\cdot(x+1) - x^2 = x^2 + x + x + 1 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$$

Resten følger nu ved at bemærke at de fem første ulige kvadrattal er givet ved

1, 9, 25, 49 og 81

De tilsvarende værdier for x i formlen for et ulige tal, dvs. 2x+1, er derfor givet ved

0, 4, 12, 24, 40

Derved fås:

$1^2 - 0^2 = 1 = 1^2$	$\rightarrow$	$1^2 = 1^2 + 0^2$
$5^2 - 4^2 = 9 = 3^2$	$\rightarrow$	$5^2 = 3^2 + 4^2$
$13^2 - 12^2 = 25 = 5^2$	$\rightarrow$	$13^2 = 5^2 + 12^2$
$25^2 - 24^2 = 49 = 7^2$	$\rightarrow$	$25^2 = 7^2 + 24^2$
$41^2 - 40^2 = 81 = 9^2$	$\rightarrow$	$41^2 = 9^2 + 40^2$

Trekanterne skulle være problemfri: (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25) og (9,40,41), idet den første ikke er en trekant eftersom siderne klapper sammen.

Formlen kan se således ud (mest for mat'er!)

$$(2n+1)^2 + \left(\frac{(2n+1)^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)^2 + 1}{2}\right)^2$$

$$(2n+1)^2 + \left(2n^2 + 2n\right)^2 = \left(2n^2 + 2n + 1\right)^2$$

Til gengæld skulle det være rimeligt problemfrit at indse at der må være uendeligt mange af slagsens, fordi ethvert ulige tal indgår i (mindst) en pythagoræisk trekant.

Kommentarer til aktivitet 2 (lærernote):

Matematisk deduktion og Toulmins model for redelig argumentation
De indledende sider om matematisk deduktion er en repetition af den foregående time! Meget af det kan derfor være faldet på plads i første time.

Logikken som et matematisk sprog: Logiske bindeord og sandhedstavler
De følgende øvelser om sandhedstavler kan man tage i fællesskab uden nødvendigvis at gå i dyb detalje. Det er først med kærlighed og logik afsnittet til sidst det bliver interessant!

Øvelse 1:
Eksempler på **tautologier**:
p or not p (eller p xor not p)
not (p and not p)
(p and q) or (p and not q) or (not p and q) or (not p and not q)
(og den tilsvarende med or erstattet af xor)

Eksempler på **kontradiktioner**:
p and not p
not (p or not p)
(p or q) and (p or not q) and (not p or q) and (not p or not q)

Det er faktisk ikke nødvendigt at opbygge sandhedstavler! Udsagnene kan bare skrives direkte ind i grafregneren:

p and not p	false
not $(p$ or not $p)$	false
$(p$ or $q)$ and $(p$ or not $q)$ and $($not p or $q)$ and $($not p or not $q)$	false

Øvelse 2: Der findes i alt 16 sandhedstavler, idet den første kombination (true-true) har to værdier osv. Hvis sandhedstavlen skal være symmetrisk er der kun 8 sandhedstavler, idet de to midterste (true-false) og (false-true) nu skal have den samme værdi. Skal man opstille den systematisk kan man fx som vist i noten starte med lutter **true**, derefter fire kombinationer med 1 **false**, derefter 6 kombinationer med 2 **false**, derefter 4 kombinationer med 3 **false** og endelig 1 kombination med 4 **false**. Mange af dem kan genkendes uden videre. Her er de 8 symmetriske:

A p_data	B q_data	C sus1	D sus2	G sus5	J sus8	K sus9	N sus12	Q sus15	R sus16
true	true	true	false	true	false	true	false	true	false
true	false	true	true	true	true	false	false	false	false
false	true	true	true	true	true	false	false	false	false
false	false	true	true	false	false	true	true	false	false

Læg mærke til at de spejles på midten, dvs. sus1 og sus16, sus2 og sus15 ... er fremkommet ved at ombytte true og false osv. Det er ikke svært at genkende disse symmetriske sandhedstavler. Kig på placeringen af true! Fx i sus2 er den true, når mindst en af dem er falsk, dvs. når de ikke begge to er sande:

sus1	sus2	sus5	sus8	sus9	sus12	sus15	sus16
true	not and	or	xor	not xor	not or	and	false

De asymmetriske kommer så fra de øvrige kombinationer, hvor p kombineres med not q eller omvendt.

A p_data	B q_data
true	true
true	false
false	true
false	false

E sus3	F sus4	H sus6	I sus7	L sus10	M sus11	O sus13	P sus14
true	true	false	false	true	true	false	false
false	true	false	true	false	true	false	true
true	false	true	false	true	false	true	false
true	true	true	true	false	false	false	false

sus3	sus4	sus6	sus7	sus10	sus11	sus13	sus14
not p or q	p or not q	not p	not q	q	p	not p and q	p and not q

Den logiske implikation: Hvis .. så

Udvidelse af tolkningen af sandhedstavlen:

	A p_data	B q_data	C p_imply_q_data
◆			
1	true	true	true
2	true	false	false
3	false	true	true
4	false	false	true

Et falsk udsagn medfører hvad som helst!
Et sandt udsagn følger af hvad som helst!

Bemærkningen om at vi ikke kan slutte baglæns kan evt. udvides til en diskussion af abduktionsprincippet:

Så selv om konklusionen *q* viser sig at være sand,
kan vi *ikke* slutte, at så må hypotesen *p* også være sand.

Bemærkning: I den **naturvidenskabelige metode** betyder det, at hvis vi har en hypotese med en bestemt konsekvens, så kan vi ikke bevise hypotesen ved at påvise at konsekvensen holder i et eksperiment. Vi kan modbevise hypotesen ved at påvise at konsekvensen ikke holder i et bestemt eksperiment. Men vi kan kun understøtte hypotesen ved at vise at konsekvensen er sand. Konsekvensen kunne jo være sand af andre årsager. og der vil altid være mange hypoteser, der fører til den samme konsekvens, dvs. man vil altid kunne forklare en observation på mange måder. Hvis man har flere hypoteser man kan vælge mellem, vælger man nu den simpleste hypotese (*occams razor*) og går videre med den. Denne form for argumentation er altså ikke logisk tvingende, men bruges ikke desto mindre meget i naturvidenskaberne, hvor den går under navnet *abduktion*).

Ved hjælp af medfører-kommandoen kan vi nu *formalisere* Toulmins argumentmodel således: Hvis vi ved at *p* er sand (**belægget**) og vi ved at *p* medfører *q* er sand (**hjemlen**), så kan vi slutte at også *q* er sand (**påstanden**). I logisk formulering gælder der altså slutningsreglen

(p og (p medfører q)) medfører q

Tilsvarende kan vi formalisere modstridsargumentet:

p og (not q medfører not p) medfører q

Her kan man evt. indføre følgende supplerende øvelse:

Øvelse: Undersøg sandhedstavlen for **det direkte argument**:
(p og (p medfører q)) medfører q
Konklusion?
Undersøg tilsvarende sandhedstavlen for *modstridsargumentet*:
p og (not q medfører not p) medfører q
Konklusion?

I begge tilfælde fås tautologier!

$\mathit{imply}(p \text{ and } \mathit{imply}(p,q),q)$	true
$\mathit{imply}(p \text{ and } \mathit{imply}(\text{not } q,\text{not } p),q)$	true

	A p_data	B q_data	C direkte	D modstrid
◆			=imply(p_data and imply(p_da	=imply(p_data and imply(not q
1	true	true	true	true
2	true	false	true	true
3	false	true	true	true
4	false	false	true	true

C	**direkte**:=**imply**(**p_data** and **imply**(**p_data**,**q_data**),**q_data**)
D	**modstrid**:=**imply**(**p_data** and **imply**(not **q_data**,not **p_data**),**q_data**)

Om kærlighed og logik:

Øvelserne løses på samme måde som eksemplet:

Øvelse 3:
Udsagnet han spørges om svarer til at spørge om Lise medfører Hanne er sandt.
Han svarer: Hvis det er sandt at Lise medfører Hanne, så er Lise sand!

A lise	B hanne	C l_imply_h	D regel
		=imply(lise,hanne)	=imply(l_imply_h,lise)
true	true	true	true
true	false	false	true
false	true	true	false
false	false	true	false

Konklusion: Han elsker Lise!

Logisk argument: Hvis han ikke elsker lise er det sandt at lise medfører hanne, da et falsk udsagn medfører hvad som helst! Men hvis det er sandt at lise medfører hanne, så er lise selv sand. Og det er en modstrid. Altså kan vi ikke opretholde antagelsen om at han ikke elsker lise, hvorfor det modsatte følger!

Øvelse 4:
Denne gang elsker han dem begge to!

A lise	B hanne	C l_imply_h	D regel2
		=imply(lise,hanne)	=imply(l_imply_h,lise) and im
true	true	true	true
true	false	false	false
false	true	true	false
false	false	true	false

D **regel2**:=**imply**(**l_imply_h**,**lise**) and **imply**(**lise**,**l_imply_h**)

Logisk argument: Den første del af reglen viser som før at han elsker Lise! Men når han elsker Lise viser den anden del af reglen at så vil Lise trække Hanne med sig. Altså er Lise sand og det er også sandt at Lise medfører Hanne. Hen elsker altså også Hanne!

Øvelse 5:

A susanne	B marcia	C diana	D regel_1	E regel_2	F regel_3	G regel_4	H regel_0
			=susanne	=imply(sus	=imply(dia	=(diana an	=regel_1 a
true	true	true	true	true	true	true	true
true	true	false	true	true	true	false	false
true	false	true	true	true	true	false	false
true	false	false	true	false	true	true	false
false	true	true	true	true	false	true	false
false	true	false	true	true	true	false	false
false	false	true	true	true	false	false	false
false	false	false	false	true	true	true	false

D **regel_1**:=**susanne** or **marcia** or **diana**
E **regel_2**:=**imply**(**susanne** and not **diana**,**marcia**)
F **regel_3**:=**imply**(**diana**,**susanne**)
G **regel_4**:=(**diana** and **marcia**) or not **diana** and not **marcia**
H **regel_0**:=**regel_1** and **regel_2** and **regel_3** and **regel_4**

Konklusion: Han elsker dem alle sammen!

Afsluttende bemærkning:
Den moderne logik går tilbage til Leibniz, som også er ophavsmand til ideen om de mulige verdener.

Leibniz believed that much of human reasoning could be reduced to calculations of a sort, and that such calculations could resolve many differences of opinion:

> "The only way to rectify our reasonings is to make them as tangible as those of the Mathematicians, so that we can find our error at a

> glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: Let us calculate [*calculemus*], without further ado, to see who is right."

Ideen om at man kan afgøre alt ved beregning kan illustreres ved en lille anekdote om Leibniz, der levede ugift hele sit liv. Men på et tidspunkt overvejede han faktisk et tilbud fra en ung dame om at gifte sig med hende. han satte sig da ned og skrev to lister: En om alle fordelene og en om alle ulemperne ved at være gift. Han fandt da at ulemperne langt overvejede fordelene – og derfor afslog han tilbuddet!

Yderligere bemærkninger om Leibniz:
Leibniz's calculus ratiocinator, which resembles symbolic logic, can be viewed as a way of making such calculations feasible. Leibniz wrote memoranda that can now be read as groping attempts to get symbolic logic—and thus his *calculus*—off the ground. But Gerhard and Couturat did not publish these writings until modern formal logic had emerged in Frege's *Begriffsschrift* and in writings by Charles Peirce and his students in the 1880s, and hence well after Boole and De Morgan began that logic in 1847.

Leibniz thought symbols were important for human understanding. He attached so much importance to the invention of good notations that he attributed all his discoveries in mathematics to this. His notation for the infinitesimal calculus is an example of his skill in this regard. Charles Peirce, a 19th-century pioneer of semiotics, shared Leibniz's passion for symbols and notation, and his belief that these are essential to a well-running logic and mathematics.

Leibniz is the most important logician between Aristotle and 1847, when George Boole and Augustus De Morgan each published books that began modern formal logic. Leibniz enunciated the principal properties of what we now call conjunction, disjunction, negation, identity, set inclusion, and the empty set. The principles of Leibniz's logic and, arguably, of his whole philosophy, reduce to two:

1. All our ideas are compounded from a very small number of simple ideas, which form the alphabet of human thought.
2. Complex ideas proceed from these simple ideas by a uniform and symmetrical combination, analogous to arithmetical multiplication.

With regard to the first point, the number of simple ideas is much greater than Leibniz thought. As for the second, logic can indeed be grounded in a symmetrical combining operation, but that operation is analogous to either of addition or multiplication. The formal logic that emerged early in the 20th century also requires, at minimum, unary negation and quantified variables ranging over some universe of discourse.

Kære Brian, Flovin og Katja

I dag havde jeg så anden time med 1d (hvor de glimrede ved et stort fravær og mangel på koncentration fra en stor gruppe piger - ligesom de havde glemt papirerne fra sidst inklusive deres forslag til en påstand om tal, de kunne argumentere for).

Det gik trægt til at begynde med, og de havde lykkeligt glemt alt om hvad der foregik sidst, men langsomt kom de frem til en påstand: 'Summen af to lige tal er lige', og vi snakkede så om hvordan vi kan argumentere for den. De syntes selvfølgelig det måtte være rigeligt at de havde fundet nogle eksempler og det så ud til at passe, så jeg prøvede at problematisere **induktionsprincippet** (hvide svaner ...). Vi så derefter på Flovins eksempel med kvadratet på et tal bestående af 1-taller og de var ret hurtigt helt overbeviste om at kvadrattallet er et palindrom, dvs. symmetrisk tal. Så stor var overraskelsen, da det kiksede den 10'ende gang, og de havde først svært ved at forstå hvordan symmetrien kunne glippe (menterne overføres kun mod venstre!). Derefter lykkedes det faktisk Kevin at komme med et sikkert belæg (et lige tal ender på et lige ciffer) og så kunne de godt se at vi denne gang ikke skal checke uendeligt mange tilfælde, men bare de fem lige cifre 0, 2, 4, 6 og 8.

Derefter havde vi nok opbrugt deres matematiktålmodighed, så jeg skiftede til kærlighedsproblemer og brugen af sandhedstavler! Pigerne insisterede på at det skulle handle om en pige, så det blev Lajla og de fik lov til at vælge to potentielle kærester Hans og Nikolaj. Udgangspunktet var så reglen:

Hvis Lajla elsker Hans, elsker Lajla også Nikolaj.

Det fik pigerne til straks at slutte at så var Lajla en trunderunde, hvilket de definerede som en pige, der havde gang i det med flere fyre. Men de havde lidt svært ved at indse at reglen faktisk ikke giver belæg for at slutte at Lajla elsker både Hans henholdsvis Nikolaj, kun at HVIS hun elskede Hans så elskede hun også Nikolaj. Martin er skarp, for han kunne godt se at man til gengæld kunne slutte at der måtte gælde:

Hvis Lajla elsker Hans, så er Lajla en trunderunde

og det var jo skarpsindigt set!

Vi havde gode diskussioner omkring sprogets tvetydighed i forbindelse med sandhedstavlerne: Som pigerne bemærkede kunne det være at Hans var Lajlas mand og Nikolaj deres søn, og så ville reglen selvfølgelig gælde, til gengæld var hun ikke en trunderunde, for det var jo lige som noget andet at elske sine børn. Tilsvarende var de senere inde på at man sagtens kunne være en trunderunde uden at elske fyrene, men de kunne godt se at vi blev nødt til at være lidt firkantede når vi formaliserede reglerne og traf logiske slutninger. Ellers ville vi aldrig kunne afgøre noget!

De syntes sandhedstavlen for **hvis så** er lidt svær - ikke så meget tilfældet p sand og q falsk, men tilfældene q sand er subtile. Vi kan ikke slutte baglæns fra en sand konklusion, for den kan være sand af andre årsager. Men nu havde vi i hvert fald fået **not**, **or** og **and** på plads og defineret **hvis så** ud fra Lajlas kærlighedsproblemer. Det førte til at vi løse den første gåde:

regel 1: Lajla elsker enten Hans eller Nikolaj
regel 2: Hvis Lajla elsker Hans, elsker hun også Nikolaj.
Elsker hun Hans? Elsker hun Nikolaj?

Den kunne Martin og Kevin hurtigt gennemskue, før pigerne rigtigt var kommet i gang med ræsonnementerne, så vi gik hurtigt over til at se på sandhedstavlerne og finde ud af hvad de afslørede om Lajlas kærlighedsliv. Og det kunne de godt se alle sammen: Hun elsker Nikolaj, men ikke nødvendigvis Hans.

Til sidst var der et kvarter tilbage, hvor maskinerne med TI-Nspire var åbne og de selv kunne prøve at løse nogle gåder. Det gik rimeligt nok med lidt støtte omkring **imply**-kommandoen.

PS. Louise og Michelle afprøvede først eksemplet med Lajla og de to regler, hvor reglen blev lavet om til **xor**, dvs. Lajla elsker netop en af dem. Og de kunne så også finde ud af hvem!

Så ikke nogen stor succes, men heller ikke nogen stor fiasko, men nu må vi se i næste uge, hvordan det går.

Kh
Bjørn