基于 TI 数理实验 Lua 编程下的分形植物模拟探索

教育部 2010 年 2 月发布的《高中理科教学仪器配备标准》中，提出了图形计算器实验室的配备要求. 广东省教育厅 2012 年 4 月发布的《普通高中数学教学指导意见》中，也对图形计算器与高中数学整合提出了明确且具体的教学要求. 笔者参与广东省 TI 技术课题研究的过程中，享受着研究中的那份快乐，也充分感受到了 TI 技术之精彩与绝妙.

一、“移动型”TI 数理实验室简介

便携性极强的 TI-*Nspire CX CAS* 图形计算器，具有“移动型”数理实验室之美誉，包括计算、几何、函数、电子表格、统计、记事本、数据采集等七大应用程序的功能，单独应用这些应用程序可以解决中学阶段乃至大学的众多数学问题，图 1、图 2 就是两个极为常见的案例. 图 1 为通过电子表格及统计与图形功能，研究高中阶段的线性回归问题. 图 2 为利用 TI 技术探究 2012 年广东高考理科数学试卷的压轴题.

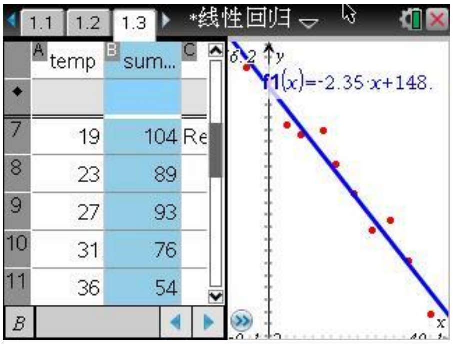

图 1

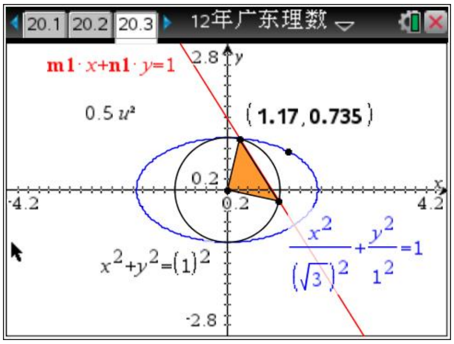

图 2

TI 图形计算器不但能解决数学问题，而且可以借助系列实验探头进行理化生实验，能使用的采集探头数十种，涵盖到了理化生许多科学实验数据的采集，方便我们解决普通实验室无法做到的一些科学实验，同时能对采集的实验数据进行回放与分析. TI 图形计算器冠名为“移动数理实验室”当之不愧. 图 3 为数据采集实验的功能界面.

图 3　　图 4

TI 教育技术娴熟者，还能利用 TI 图形计算器设计出相应的课件或实验平台，如图 4～图 6 所示. 图 4 为十分经典的抛掷硬币的数学实验，可以帮助我们理解频率与概率的关系，在进行有趣的动手实验之中，激发我们探究概率的计算方法，从而更好的掌握所学知识. 图 5 则为 TI 技术设计出的化学滴定实验，图 6 为 TI-*Lua* 编写的关于杠杆平衡的物理游戏.

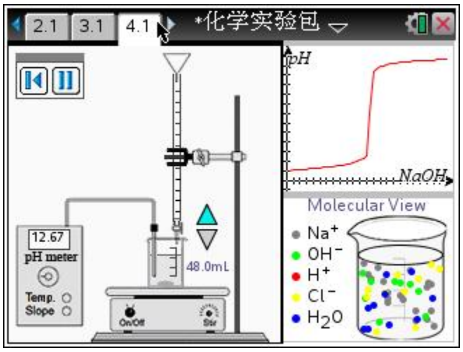

图 5

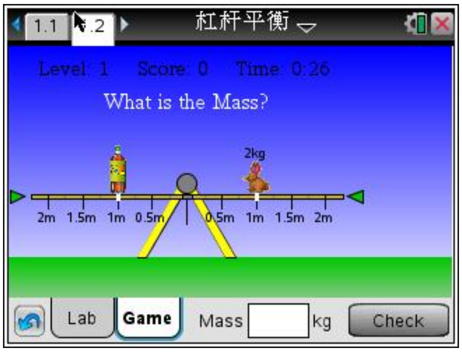

图 6

我们沉浸在“移动型”TI 数理实验室平台简单且有趣的实验研究之中时，还可以进行更深奥的科学研究，下面借助 TI 技术研究 80 年代近期才出现的计算机模拟自然景观的图形学问题，涉及到数学方面的新领域—分形几何学.

二、分形几何入门基础知识

二十世纪七十年代中期，美国数学家曼德勃罗（B.B.Mandelbrot）提出分形（Fractal）一词，其原意具有不规则、支离破碎等含义，后来创立了分形几何学，它是一门以非规则几何形态为研究对象的几何学. 由于不规则现象在自然界是普遍存在的，因此分形几何又称为描述大自然的几何学. 例如，弯弯曲曲的海岸线、起伏不平的山脉，粗糙不堪的断面，变幻无常的浮云，九曲回肠的河流，纵横交错的血管，眼花缭乱的满天繁星等，它们的特点都是极不规则或极不光滑，直观而粗略地说，这些对象都是分形.

分形几何与传统几何相比，有如下两大特点：

⑴ 从整体上看，分形几何图形是处处不规则的. 例如海岸线和山川形状，从远距离观察，其形状是极不规则的.

⑵ 在不同尺度上，图形的规则性又是相同的. 例如上述的海岸线和山川形状，从近距离观察，其局部形状又和整体形态相似，它们从整体到局部，都是自相似的.

部分与整体以某种形式相似的形，称为分形. 然而，经过理论和应用的检验，人们发现这个定义很难包括分形如此丰富的内容. 实际上，对于什么是分形，到目前为止还不能给出一个确切的定义，正如生物学中对“生命”也没有严格明确的定义一样，人们通常是列出生命体的一系列特性来加以说明. 对分形的定义也可同样的处理.

分形一般有以下特质：在任意小的尺度上都能有精细的结构；太不规则，以至难以用传统欧氏几何的语言描述；自相似；有着简单的递归定义. 详细的表述如下：

（*i*）分形集都具有任意小尺度下的比例细节，或者说它具有精细的结构；

（*ii*）分形集不能用传统的几何语言来描述，它既不是满足某些条件的点的轨迹，也不是某些简单方程的解集；

（*iii*）分形集具有某种自相似形式，可能是近似的自相似或者统计的自相似；

（*iv*）一般地，分形集的“分形维数”，严格大于它相应的拓扑维数；

（*v*）在大多数令人感兴趣的情形下，分形集由非常简单的方法定义，可能以变换的迭代产生.

其实，分形很早就有研究，例如十分经典的 *Koch* 曲线. 1904 年，瑞典数学家柯赫 H.von Koch(1870-1924)研究了一个处处连续而处处不可导的曲线例子，后人一般称为 *Koch* 曲线

(*Koch* 雪花)，并吸引了一批著名数学家如 Giuseppe Peano(1859-1932)、David Hilbert(1862-1943)致力于构造和研究类似的分形曲线.

Koch 雪花构造步骤如下：第一步，取边长为 1 的正三角形，将每边三等分，以各边的中段为边，向外作小的正三角形，并去掉原来的中段，得到一个星形十二边形；第二步，继续将此十二边形的每条边三等分，以各边中段为边向外作更小的正三角形并去掉原来的各个中段，生成一个 48 边形；如此继续下去以至无穷，得到的极限曲线是连续的但在任何地方都没有确定的切线，如图 7 所示，形状像纷纷飞扬的雪花.

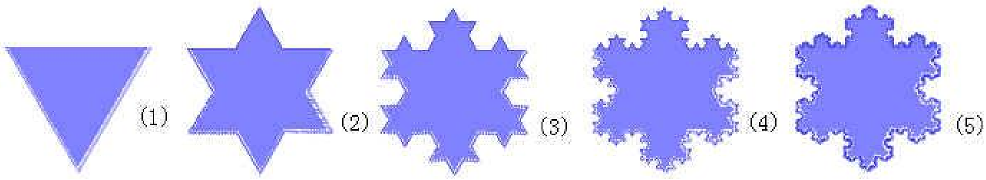

图 7

计算机科学技术的进步，促进了分形的研究与发展，也对纯数学的传统观念提出了挑战. 计算机技术不仅使分形领域的一些新发现成为可能，同时因其图形直观的表现方式，也极大地激发了科学家和人们的兴趣与认识，推动了分形理论的发展.

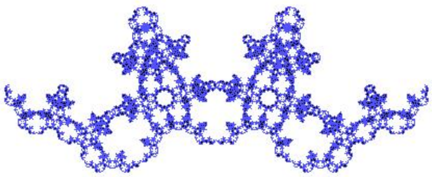

图 8

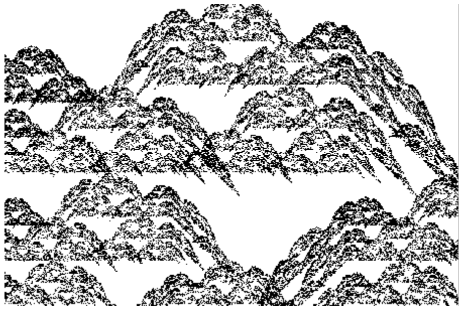

图 9

借助计算机先进技术工具进行分形探究，可以得到美妙且实用的图形. 例如上面两个图中，图 8 为简单迭代生成的皇冠曲线，图 9 为 *IFS* 方法生成的地貌.

三、分形 IFS 算法进行植物模拟

利用计算机研究分形，需要掌握一些简单的算法，较为常见的是：简单递归算法、逃逸时间算法、迭代函数系统（Iterated Function System，简称 *IFS*）算法.

分形几何学与计算机图形学相结合，产生一门新的学科—分形图形学. 它的主要任务是以分形几何学为数学基础，构造非规则的几何图形，从而实现分形的可视化，以及对自然景物的逼真模拟. 近代科学上涌现出的一个分支，就是计算机模拟自然世界，其中常见的方法就是通过 *IFS* 算法模拟植物.

迭代函数系统（Iterated Function System，*IFS*）是分形理论的重要分支，它将待生成的图像看成是由许多与整体相似的（自相似）或经过一定变换与整体相似的（自仿射）小块拼贴而成. 变换主要包括相似变换与仿射变换两种.

相似变换：如果对于任意两点 A、B，以及对应点 A'、B'，总有 $A'B'=k\cdot AB$（k 为正实数），那么，这个变换叫做相似变换，实数 k 叫做相似比.

仿射变换：$x'=ax+by+e$，$y'=cx+dy+f$，其中 a,b,c,d,e,f 为仿射变换系数.

直观上看，相似变换是指在各个方向上变换的比率必须相同的一种比例变换，仿射变换是指在不同的方向上变化的比率可以不同的一种比例变换.

例如生成二维分形树木（图 10），我们可以用多个仿射变换来分别得到 $w1,w2,w3,\ldots$. 由于自然景观的随机性，每一个仿射变换式伴随的概率 p 也可以不同，一般来说，面积越大，p 值越大.于是，只要获得 a,b,c,d,e,f,p（ *IFS* 码）的值，便可以得到要表达的图形.图 11 就是由表 1 的 *IFS* 码构造出来的分形树.

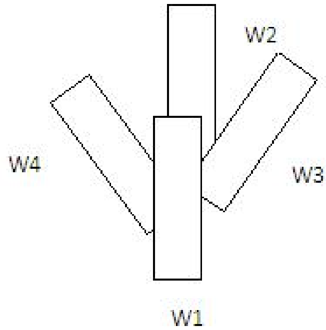

图 10

图 11

a	b	c	d	e	f	p
0.2	-0.49	0.34	0.43	0.44	0.25	0.25
0.46	0.41	-0.25	0.36	0.25	0.57	0.25
-0.06	-0.07	0.45	-0.11	0.6	0.1	0.25
-0.04	0.07	-0.47	-0.02	0.49	0.51	0.2
-0.64	0	0	0.5	0.86	0.25	0.05

表 1

根据 *IFS* 算法及相应植物的 *IFS* 码，具体的算法步骤如下：

S1：设定一个起始点 (x_0, y_0) 及总的迭代步数；

S2：以概率 p 选取仿射变换 w，形式为 $x_1 = ax_0 + by_0 + e$， $y_1 = cx_0 + dy_0 + f$；

S3：以 w 作用点 (x_0, y_0)，得到新坐标 (x_1, y_1)；

S4：令 $x_0 = x_1$， $y_0 = y_1$；

S5：在屏幕上打出 (x_0, y_0)；

S6：重返第 2 步，进行下一次迭代，直到迭代次数大于总步数为止.

四、TI-Ns*p*rie 技术之 Lua 编程实验

TI-*Nspire* 图形计算器具有程序功能，其常规编程语言为 TI-*Basic*，它支持高中必修教材《数学 3》中算法的学习. 在 TI-*Nspire* 3.0 版中，又增加了 *Lua* 脚本语言功能. *Lua* 语言是成熟的、流行的和灵活的脚本语言，与 TI-*Nspire* 手持设备的整合，使 TI-*Nspire* 平台的编程能力得以增强，也能更好的拓展 TI 技术在数学与科学方面的应用.

Lua 是一个十分小巧的脚本语言，是巴西里约热内卢天主教大学（Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro）里的一个研究小组，由 Roberto Ierusalimschy、Waldemar Celes 和 Luiz Henrique de Figueiredo 所组成并于 1993 年开发. 其设计目的是为了嵌入应用程序中，从而为应用程序提供灵活的扩展和定制功能. *Lua* 由标准 *C* 编写而成，几乎在所有操

作系统和平台上都可以编译. 它具有如下主要特性：

⑴ 轻量级. *Lua* 语言的官方版本只包括一个精简的核心和最基本的库，这使得 Lua 体积小、启动速度快，从而适合嵌入在别的程序里.

⑵ 可扩展. *Lua* 并不象其它许多“大而全”的语言那样，包括很多功能，比如网络通讯、图形界面等. 但是 *Lua* 可以很容易地被扩展：由宿主语言(通常是 *C* 或 *C++*)提供这些功能，*Lua* 可以使用它们，就像是本来就内置的功能一样.

⑶ 其它特性. *Lua* 还具有其它一些特性：同时支持面向过程编程和面向对象编程；自动内存管理；提供了一种通用类型的表，用它可以实现数组，表，集合，对象；语言内置模式匹配；闭包(closure)；函数也可以看做一个值；提供多线程支持；等等.

根据前面 *IFS* 算法的基本步骤，利用 TI-*Nspire* 教师软件版的 *Lua* 编辑调试工具，结合表 1 的 *IFS* 码编写出如下代码（图 12）. 若学过算法语句结构，不难看懂其程序.

分形编程

```
1 platform.apiLevel = '1.0'
2 --IFS码
3 a  = {{0.2,-0.49,0.34,0.43,0.44,0.25,0.25},
4      {0.46,0.41,-0.25,0.36,0.25,0.57,0.25},
5      {-0.06,-0.07,0.45,-0.11,0.6,0.1,0.25},
6      {-0.04,0.07,-0.47,-0.02,0.49,0.51,0.2},
7      {-0.64,0,0,0.5,0.86,0.25,0.05}}
8
9 x0 = 1;   y0 = 1
10 dz = {}   --点组
11 for i=1,8000 do
12     local r = math.random()
13     if r<= 0.25 then
14         x1 =a[1][1]*x0+a[1][2]*y0+a[1][5]
15         y1 =a[1][3]*x0+a[1][4]*y0+a[1][6]
16     end
17     if r>0.25 and r<=0.5 then
18         x1 =a[2][1]*x0+a[2][2]*y0+a[2][5]
19         y1 =a[2][3]*x0+a[2][4]*y0+a[2][6]
20     end
21     if r>0.5 and r<=0.75 then
22         x1 =a[3][1]*x0+a[3][2]*y0+a[3][5]
23         y1 =a[3][3]*x0+a[3][4]*y0+a[3][6]
24     end
25     if r>0.75 and r<=0.95 then
26         x1 =a[4][1]*x0+a[4][2]*y0+a[4][5]
27         y1 =a[4][3]*x0+a[4][4]*y0+a[4][6]
28     end
29     if r>0.95 and r<=1 then
30         x1 =a[5][1]*x0+a[5][2]*y0+a[5][5]
31         y1 =a[5][3]*x0+a[5][4]*y0+a[5][6]
32     end
33     x0 = x1;   y0 = y1
34     dz[i]={(x1+0.2)*200, (1-y1)*200}
35 end
36
37 function on.paint(gc)   --窗口绘制
38     for i in pairs(dz)  do
39         gc:drawArc(dz[i][1],dz[i][2],1,1,0,360)
40     end
41     gc:drawString(#dz,10,210)
42 end
```

图 12

上述程序执行的结果为图 11，代码第 3 行的“a”，是 *Lua* 常见的表，即数组，用它对 *IFS* 码进行赋值，由 *Lua* 表数据结构的简捷性，可轻松将二维表模式的 *IFS* 码赋于“a”.

程序代码的第 37 行，“**function on.paint(gc)**”，为窗口绘制事件函数，属 TI-*Lua* 扩充语句，函数块内是对窗口进行绘制的应用程序脚本，任何对屏幕的绘制操作都在这个事件里面进行绘制. 代码第 38 行与 40 行，“for i in pairs(dz) do … end”是 *Lua* 的范型 for 循环结构，这里是遍历一次表 dz. 代码的第 39 行、41 行的代码的语法格式参考如下：

⑴ **gc:drawArc(x, y, width, height, startAngle, endAngle)**

类型：图形库的方法，TI-*Lua* 扩充语句.　　**功能：**画弧.

说明：在距左上角（x，y）的位置，像素宽为 **height**，高为 **height** 的矩形内绘制一段圆弧，圆弧绘制时从 **startAngle** 度开始，在 **endAngle** 度结束. 图 12 中是画一个点.

⑵ **gc:drawString(“text”, x, y)**

类型：图形库的方法，TI-*Lua* 扩充语句.　　**功能**：绘制文本.

说明：在窗口左上角像素位置（x，y）开始绘制文本 **text**. **“text”** 可以是具体的文本，也可以用字符串变量或表达式. 图 12 中“#dz”是表 dz 的记录数.

由于 *IFS* 码的不同导致形态不同，将图 12 的程序进行优化，换用另外一组 *IFS* 码，如图 13 所示，得到了图 14 的分形树. 修改 *IFS* 码的概率 p 值，代码第 3 行最后的 0.25 改为 0.05，第 4 行最后的 0.25 改为 0.45，得到了一棵更为茂盛的分形树（图 15）.

分形编程

```
1 platform.apiLevel = '1.0'
2 --IFS码
3 a = {{-0.04,0,-0.19,-0.47,-0.12,0.3,0.25},
4      {0.65,0,0,0.56,0.06,1.56,0.25},
5      {0.41,0.46,-0.39,0.61,0.46,0.4,0.25},
6      {0.52,-0.35,0.25,0.74,-0.48,0.38,0.25}}
7
8 x0 = 1;  y0 = 1
9 dz = {}  --点组
10 for i=1,8000 do
11     local r = math.random()
12     local p = 0
13     for i in pairs(a)  do
14         p = p + a[i][7]
15         if r < p then
16             x1 = a[i][1]*x0+a[i][2]*y0+a[i][5]
17             y1 = a[i][3]*x0+a[i][4]*y0+a[i][6]
18             break
19         end
20     end
21     x0 = x1;  y0 = y1
22     dz[i]={(x1+4)*40, (4-y1)*40}
23 end
24
25 function on.paint(gc)  --窗口绘制
26     gc:setColorRGB(50,200,100)
27     for i in pairs(dz)  do
28       gc:drawArc(dz[i][1],dz[i][2],1,1,0,360)
29     end
30     gc:drawString(#dz,10,210)
31 end
```

图 13

图 14

图 15

在更改 *IFS* 码时，注意适当对图 13 中的第 22 行的四个系数进行调正，四个系数分别对应着图形的平移变换与伸缩变换. 只要多尝试，一定能发现出更多植物形态的 *IFS* 码.

五、TI- Lua 编写植物模拟实验程序

利用 TI-*Nspire* 图形计算器强大的 *Lua* 编程功能，设计出一个更为实用的植物模拟实验程序，具体的程序界面和功能如图 16～图 19 所示，源程序的下载地址为：http://fxesms.5d6d.net/thread-8023-1-1.html. 注意先到 TI 官网下载教师软件试用版.

图 16

图 17

图 18

图 19

系统内置了 9 种分形模拟的植物，如图 20～图 28 所示，其 *IFS* 码为网上搜索而得，部分植物的命名有待查阅资料进行考证.

图 20

图 21

图 22

图 23

图 24

图 25

图 26

图 27

图 28

图 29

编写的分形植物模拟实验，基于“移动型”TI 数理实验室平台，更大的价值是用它自行实验，在玩的过程中，发现能模拟的更多分形植物，例如图 29 就是源于图 28 分形植物修改实验后的新结果之一.

亲爱的同学，想发现出更多的分形植物吗？用 TI 图形计算器动手实验吧，在玩的过程中，查阅资料对植物准确命名，同时了解近代数学的分形知识和高科技手段的运用.

小结语：

利用“移动型”TI 数理实验室，我们不仅能在课堂上用图形计算器学习数学与科学，而且可以携带图形计算器，随时随地用来研究、解决数学与理化生等科学问题，可以在课外继续进行自身的体验、探究和实践，更好的进行自主学习，探索发现科学结论.

（作者: 高建彪　邮箱:dsgjb@163.com，QQ:76456245　2012 年 10 月 13 日完稿于中山市东升高中）

说明：涉及到分形新领域及生物知识，表述中的不准确请各位斧正.