

用TI Nspire计算不定积分不能一蹴而就怎么办

田增锋

浙江万里学院基础学院

TI Nspire CAS内置的计算机代数系统可以解决相当一部分的不定积分计算，但是和它强大的计算定积分的能力比较起来，计算不定积分的能力要差很多，毕竟定积分存在大量的数值积分方法。

计算不定积分的方法一般有：直接积分—即通过一些恒等变形将被积函数化成已知积分；换元积分法(包括第一类换元积分法和第二类的换元积分法)；分部积分法。

1 几类不能直接积分的问题处理方法

以下的一些例子说明如何结合其它方法运用TI Nspire CAS计算不定积分。

例1.
$$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx$$

这是一个可以直接积分的问题。利用TI Nspire CAS的积分计算模板，返回结果和原式相同，也就是说不能直接算出这个积分(见图1)。

这个积分事实上可以首先分母有理化后简化为两个积分的。TI Nspire CAS分母有理化后给出一个提示信息：结果的域可能扩大。我们使用计算函数定义域的命令domain来分别计算原来函数和有理化后的函数的定义域。结果都是 $0 \leq x < \infty$ (见图1)。接下来将分子用expand命令展开，然后计算两个不定积分(见图2)。

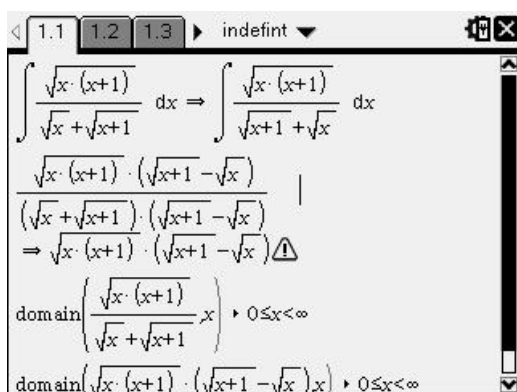


图1

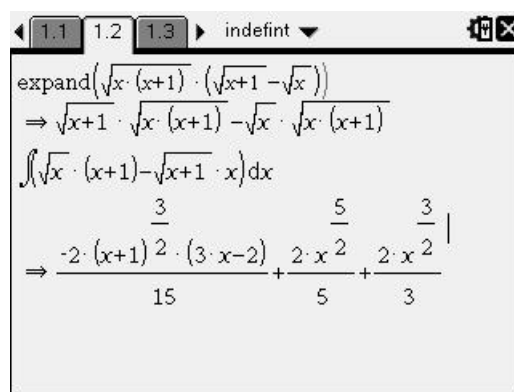


图2

例2.
$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$$

这是一个凑微分的问题，利用TI Nspire CAS的积分命令，返回结果只是将分子拆开，变成了两个不定积分(见图3)。经过观察，用凑微分的话，令 $u = xe^x$ 。给分子和

分母都乘以 e^x 后, 再次用积分命令结果依然不变. 看起来TI Nspire CAS并非那么全能啊:-)

使用with命令|做变量代换, 然后计算换元后的不定积分, 最后用|做回代(见图4).

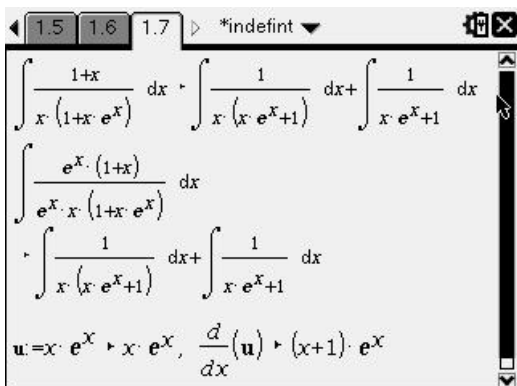


图3

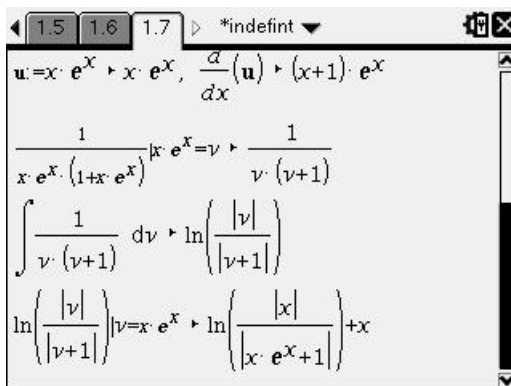


图4

例3.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} dx$$

此问题属于第二类换元积分问题. 直接用TI Nspire CAS的积分命令得到的结果只是把分母的根式变成了幂(见图5). 根据经验此种类型的积分, 可以做变换 $t = \frac{x+1}{x-1}$, 为此将分母中的 $(x-1)^2$ 提取出来, 但是TI Nspire CAS依然没有理会我们的提示噢(见图5). 为了做换元积分, 需要从 $t = \frac{x+1}{x-1}$ 解出 x , 利用solve命令即可, 然后用求导数命令计算 dx (见图5).

将 $x = \frac{t+1}{t-1}$ 和 dx 带入原来的积分化简后积分, 最后回代可得结果(见图6).

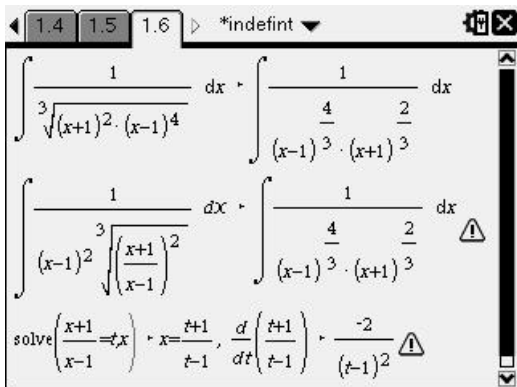


图5

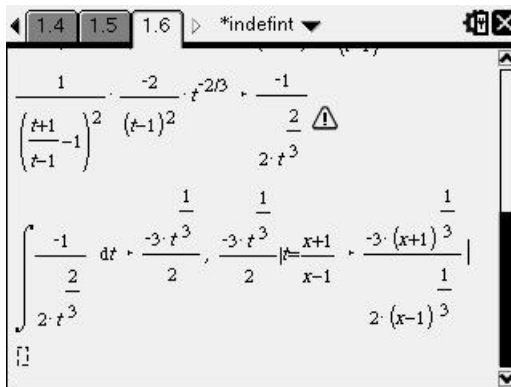


图6

例4.
$$\int \frac{1}{(1+x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

此例属于三角代换的换元积分问题. 直接积分原样返回(见图7). 此类积分做三角代换 $x = \sin t, t \in [-\pi/2, \pi/2]$ 消去根式, 为此先在被积函数中将 x 换成 $\sin t$, 然后将积分中的 dx 换成 $d(\sin(t))$, 最后积分(见图7). 这里我们去掉了绝对值, 因为在一四象限余弦函数是非负的.

因为关于 t 的被积函数是周期函数因此结果里面给出了用mod函数表示的周期结果, 此例中只考虑 $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, 所以只需利用第一个结果做回代 $t = \arcsin x$ 即可(见图8). 如果对结果存疑, 用求导运算可以验证(见图8).

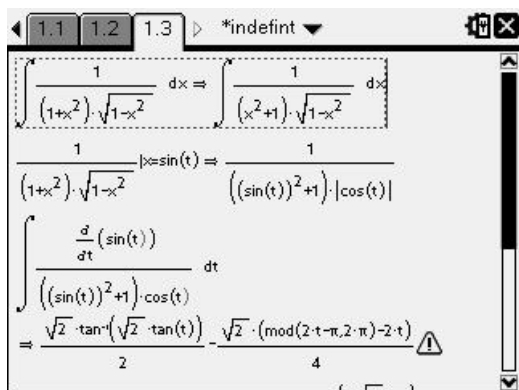


图7

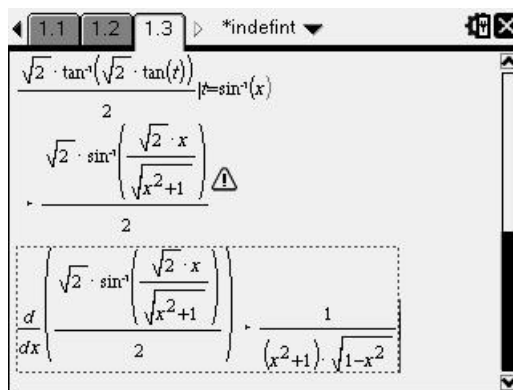


图8

例5. $\int \frac{x}{1 + \cos x} dx$

直接积分原样返回(见图9). 问题出在了分母上, 用半角公式 $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ 将分母变形(见图9). 变形后再积分就能计算出来了, 这里事实上是运用的分部积分法(见图10).

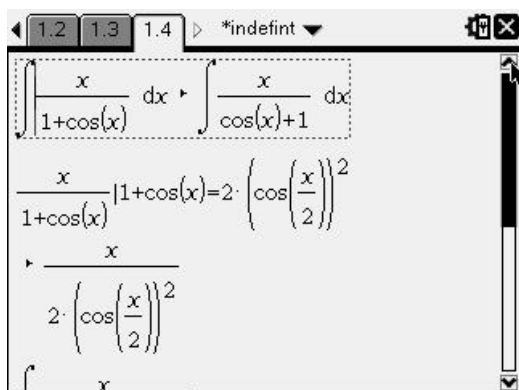


图9

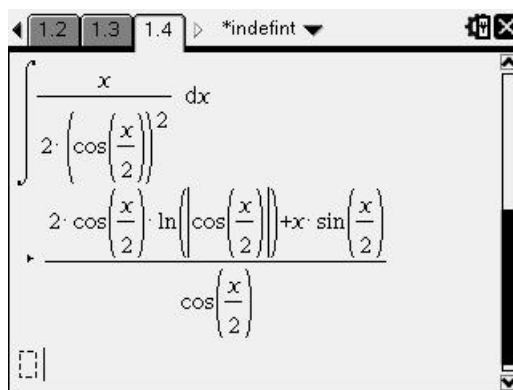


图10

例6. $\int x \tan x \sec^4 x dx$

这是一个分部积分问题, 直接积分返回用正弦和余弦表示的一个中间结果, 但是没有最后结果(见图11).

这个虽然不是最后结果但是提示我们用分部积分法, 选择 $u = x, v = -\frac{1}{4} \cos^{-4} x = -\frac{1}{4} \sec^4 x$, 则 $\int x \tan x \sec^4 x dx = -\frac{x}{4} \cos^{-4} x + \frac{1}{4} \int \sec^4 x dx$, 最后计算 $\frac{1}{4} \int \sec^4 x dx$ (见图11).

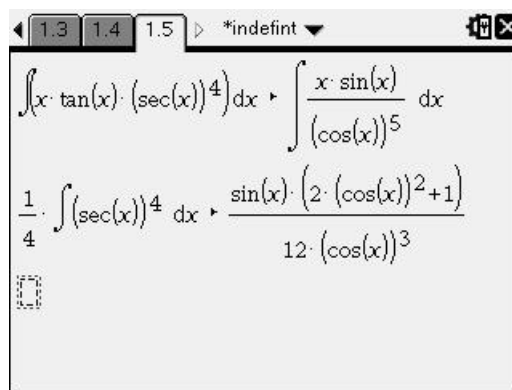


图11

2 使用建议

在承认TI Nspire CAS功能的强大时，也要清醒认识到这毕竟是个计算器(当然是个高级的计算器啦)，很多问题并没有完全智能化，学习微积分时还是需要系统地掌握各种方法，对于一些繁琐的和例行性的工作则可以借助于TI Nspire CAS摆脱繁重的计算任务.

通过上述的几种问题，同时我们也可以看到TI Nspire CAS对于创新式思维培养的作用：不拘泥于问题，寻求各种方案解决问题的能力.

参考文献

- [1] 吴赣昌主编, 微积分(经管类), 中国人民大学出版社, 2008年1月