

用图形计算器研究 10 年广东高考文科数学第 20 题

一、问题背景

例 (2010 年广东高考.文数第 20 题) 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x 均有 $f(x) = kf(x+2)$, 其中常数 k 为负数, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上有表达式 $f(x) = x(x-2)$.

- (1) 求 $f(-1)$, $f(2.5)$ 的值;
- (2) 写出 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的表达式, 并讨论函数 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的单调性;
- (3) 求出 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值与最大值, 并求出相应的自变量的取值.

二、研究过程 (机型: TI-Nspire CX CAS 中文彩屏机)

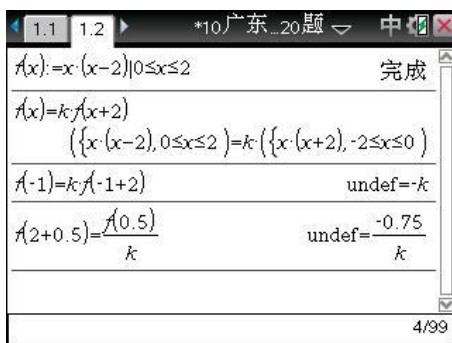
1、求函数值.

操作步骤要点:

- S1 添加一个计算页面, 输入已知条件;
- S2 由 $f(x) = kf(x+2)$ 计算 $f(-1)$;
- S3 由 $f(x) = kf(x+2)$ 逆算 $f(2.5)$.

显示结果如下:

注释: 注意区分两个已知条件, 一个是恒成立的函数关系式, 另一个是某区间上的函数解析式. 此类问题的解法是由已知的函数关系式将所求函数值转化到给定区间上的函数值.

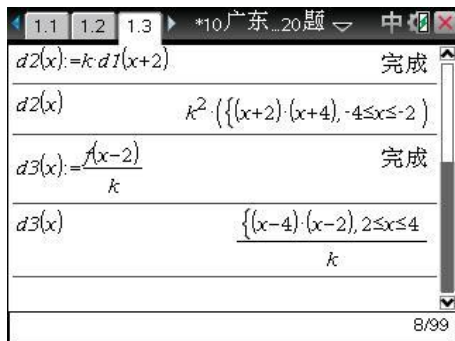
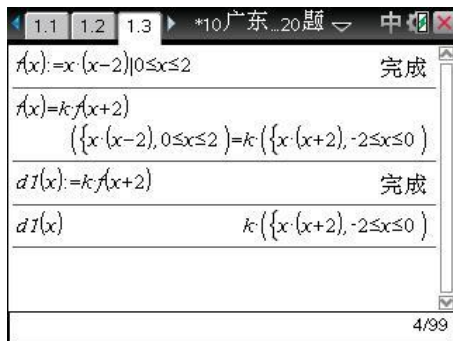


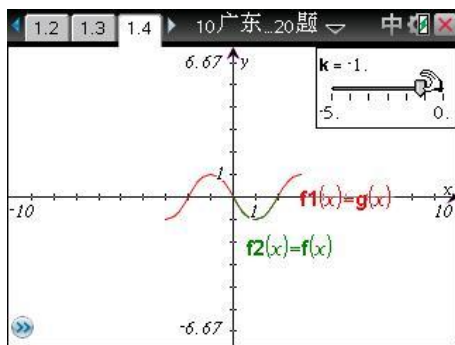
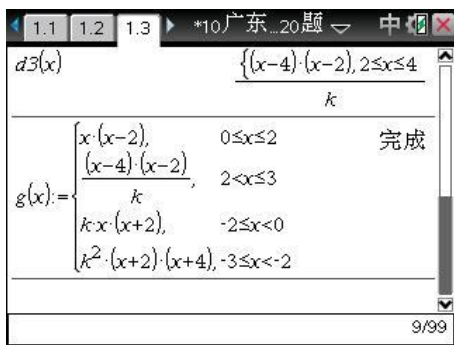
2、求函数表达式, 绘制图象研究单调性.

操作步骤要点:

- S1 添加一个计算页面, 输入已知条件;
- S2 定义 $d1(x) := k \cdot f(x+2)$, 化归出区间 $[-2, 0]$ 的函数解析式;
- S3 定义 $d2(x) := k \cdot d1(x+2)$, 化归出区间 $[-4, -2]$ 的函数解析式;
- S4 定义 $d3(x) := \frac{f(x-2)}{k}$, 化归出区间 $[2, 4]$ 的函数解析式;
- S5 由以上结果得到函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 的函数解析式, 并定义 $g(x)$;
- S6 添加一个图形页面, 插入游标 k , 设置 k 的范围为 $[-5, 0]$, 作出函数 $g(x)$ 的图像.

显示结果如下:





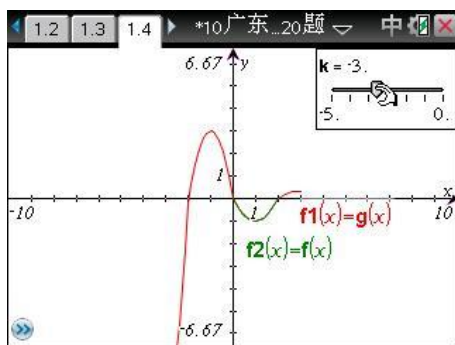
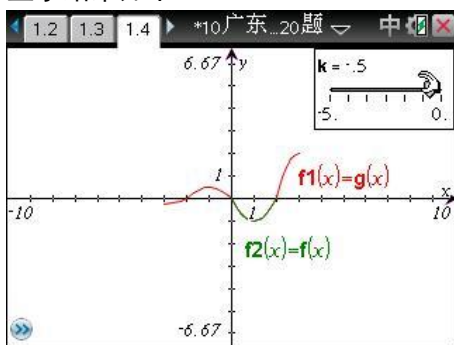
实验探索：拖动游标，改变 k 值，观察得到函数的递增区间为 $[-3, -1]$, $[1, 3]$ ；递减区间为 $[-1, 1]$ 。

注释：在图形页面中，依次按【菜单】→【动作】→【插入游标】，将插入的游标修改为 k ，并可以用滑鼠键拖曳位置和改变 k 值。

3、求函数最小值与最大值。

实验探索：拖动游标，改变 k 值，观察函数的最大值、最小值及相应 x 的取值。

显示结果如下：



实验结论：当 $k \in [-1, 0)$ 时， $f(x)_{\min} = f(1) = -1$ ， $f(x)_{\max} = f(3) = \frac{(3-4)(3-2)}{k} = \frac{-1}{k}$ ；

当 $k \in (-\infty, -1)$ 时， $f(x)_{\min} = f(-3) = k^2(-3+2)(-3+4) = -k^2$ ， $f(x)_{\max} = f(-1) = -k$ 。

注释：用滑鼠键拖曳改变 k 值时，观察函数图像的变化，容易得到最大值和最小值以及相应的 x 值。分析分段函数的解析式，我们不难得到各段均为一段二次函数图像，由系数的大小而决定它的开口方向和最大（小）值的取值情况。

小结语：

此题考查了函数的概念与基本性质，涉及到分段函数与二次函数研究，数学思想方法中，化归的思想方法、分类讨论与数形结合的思想方法，对解决此题都起了关键性的作用。图形计算器的辅助研究，让我们的解题思路更为明朗，亲爱的同学们，经历了图形计算器的探索实验，你能写出此题的数学求解过程吗？请尝试写一写，试试自己是否掌握好。

（本文作者：广东省中山市东升高中 高建彪 邮箱：dsgjb@163.com, QQ: 76456245）